

УДК 005.12

Ревенко Д.С.

*кандидат економічних наук,
доцент кафедри економіки та маркетингу
Національного аерокосмічного університету
імені М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»*

ПАРАМЕТРИЧНИЙ СИНТЕЗ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ (НА ПРИКЛАДІ ЕКОНОМІКИ УКРАЇНИ)

У статті викладено дослідження динамічної стійкості розвитку економіки України. Удосконалено метод оцінювання стійкості розвитку економічної системи України на основі моделі Солоу і детермінованих підходах до дослідження стійкості розвитку. На основі теорії динамічних систем отримано передавальну функцію для моделі економічного розвитку і матриці постійних коефіцієнтів системи, використано умову стійкості за Ляпуновим, одержано аналітичний вираз характеристичного рівняння для параметрів, що входять в умови стійкості.

Ключові слова: стійкість, теорія динамічних систем, моделювання, економічне зростання, економіка України.

Ревенко Д.С. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА (НА ПРИМЕРЕ ЭКОНОМИКИ УКРАИНЫ)

В статье изложены исследования динамической устойчивости развития экономики Украины. Усовершенствован метод оценки устойчивости развития экономической системы Украины на основе модели Солоу и детерминированных подходов к исследованию устойчивости развития. На основе теории динамических систем получено передаточную функцию для модели экономического развития и матрица постоянных коэффициентов системы, использовано условие устойчивости по Ляпунову, получено аналитическое выражение характеристического уравнения для параметров, входящих в условия устойчивости.

Ключевые слова: устойчивость, теория динамических систем, моделирование, экономический рост, экономика Украины.

Revenko D.S. PARAMETRIC SYNTHESIS OF A DYNAMIC MODEL OF ECONOMIC GROWTH (ON EXAMPLE, THE ECONOMY OF UKRAINE)

The article presents the study of dynamic stability of the Ukrainian economy. Improved methods of estimation of sustainability of the economic system in Ukraine based on the Solow model and deterministic approaches to the study of sustainability. Based on the theory of dynamical systems received transfer function of economic development model and the matrix of constant coefficients of the system, used condition stability according to Lyapunov, received the analytical expression of the characteristic equation for the parameters in terms of sustainability.

Keywords: sustainability, theory of dynamical systems, modeling, economic growth, the economy of Ukraine.

Постановка проблеми у загальному вигляді і її зв'язок із найважливішими науковими і практичними завданнями. Стійкість є основною складовою динамічних систем, вона трактується як здатність системи повернутися до стану рівноваги після подолання збурювання, що викликало порушення рівноваги [1].

На цей час багато дослідників усе більше уваги приділяє питанням управління соціально-економічними системами для формування механізмів стійкого економічного зростання.

У теоретико-методичному плані особливо актуальними стають питання вибору моделей і методів оцінювання стійкості соціально-економічних систем у контексті динаміки їхнього розвитку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Основний вклад у моделювання стійкості функціонування соціально-економічних систем внесли такі вчені, як О. Ареф'єва, В. Гросул, М. Кизим, В. Ковалевич, Г. Козаченко, Л. Костирко, В. Кочетков, Р. Михайлюк, Л. Сергеева, С. Тхор, Р. Брейлі, К. Джеймс Ван Хорн, Э. Хелферт та ін. Варто зазначити, що в цей час дослідники займаються експертним моделюванням статичних станів стійкості соціально-економічних систем, а детермінованому моделюванню приділяється недостатньо уваги.

Детерміноване моделювання стійкості динамічних систем бере початок від загальної теорії автоматичного управління. Саме формалізовані підходи до моделювання, чіткий математичний апарат привертає все більшу увагу вчених до цих проблем.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Поняття стійкості найповніше може бути визна-

чене в рамках теорії динамічних систем. Під системою в цьому випадку варто розуміти впорядковану сукупність взаємозалежних і взаємодіючих елементів, що утворюють єдине функціональне ціле, призначене для рішення певних завдань (досягнення певних цілей). Втрата стійкості в загальному випадку може відбуватися внаслідок зміни параметрів системи (біфуркації), через наявність зовнішніх впливів (зокрема, занадто значних або якісно несумісних із системою), або під час порушення зв'язків у системі, коли змінюється її структура (структурна нестійкість).

Метою статті є формування і практична реалізація методу, який ґрунтується на детермінованих підходах до моделювання, який би дозволяв оцінювати стійкість розвитку економіки України.

Викладення основного матеріалу дослідження. Будь-яка система під впливом зовнішніх і внутрішніх збурень змінює свій стан у часі. Динамічною системою називають сукупність взаємодіючих компонентів, в яких процеси, визначаються початковим станом цих компонентів, взаємозв'язками між ними й доданими до системи впливами. Стан динамічної системи в часі й просторі характеризується змінними, що набувають у кожний момент часу певних числових значень [1].

Економічна динаміка, що вивчає поведінку складних динамічних систем в економіці, не може обійти увагою такий важливий напрямок, як стійкість систем. Основна теорія стійкості започаткована в працях А. Пуанкаре і О. Ляпунова.

Динамічна система в конкретний момент часу характеризується своїм станом і напрямом руху. Сис-

тема здійснює рух або під впливом внутрішніх спонукальних причин, або в результаті впливу на неї зовнішнього середовища. Принципово різними є причини, які обумовлюють її рух як на початковий момент часу, так і в наступні моменти.

Під стійкістю розуміється здатність системи повертатися в рівноважний стан у випадку, якщо вона була виведена з нього. У такому випадку стан рівноваги називається стійким. Другому варіанту відповідає нестійкість стану і системи.

Поняття стійкості також застосовується і відносно до руху системи, а саме як властивість мало відхилитися від заданої траєкторії руху при малих збурювальних впливах з боку зовнішнього середовища. У цьому випадку треба говорити про динамічну стійкість.

Складність і відкритість економічних систем пояснюють той факт, що стійкість на практиці має місце достатньо рідко. Однак це поняття має важливе значення для економічної теорії і дозволяє досліджувати внутрішні властивості економічних систем [2].

Ситуація, яка склалася в економіці України, показує, що економічна динаміка потребує більш глибокого вивчення, ніж це було до сьогодні. Саме вивчення стану економічного росту України і динамічної стійкості обумовлює актуальність цього дослідження.

У короткостроковому розрізі в економіці відбуваються постійні коливання обсягів випуску, рівня зайнятості населення, цін навколо тренду, заданого загальним поступовим рухом економіки, збільшенням її реального обсягу випуску, тобто економічним зростанням. Економічне зростання можна розглядати як довгостроковий аспект динаміки сукупної пропозиції, або, що точніше, потенційного обсягу випуску. Аналіз його факторів і закономірностей є одним з центральних питань макроекономічної теорії.

Під економічним зростанням зазвичай розуміють довгострокову тенденцію збільшення реального обсягу випуску в економіці. Серед найбільш поширених і обґрунтованих моделей економічного зростання є модель Солоу. Ця модель росту долає ряд обмежень кейнсіанських моделей і дозволяє точніше описати особливості макроекономічних процесів.

Р. Солоу показав, що нестабільність динамічної рівноваги в кейнсіанських моделях була наслідком невзаємозаміни факторів виробництва. Замість функції Леонтєва він використовував у своїй моделі виробничу функцію Коба-Дугласа, в якій труд і капітал є субститутами. Іншими передумовами аналізу в моделі Солоу є спадна гранична продуктивність капіталу, постійна віддача від масштабів, постійна норма вибуття, відсутність інвестиційних лагів.

Модель економічного зростання Солоу є відправною точкою практично всіх досліджень економічного зростання. З її допомогою виявляють причини тимчасового і постійного, стійкого зростання економіки. У моделі розглядаються чотири змінні: випуск Y , капітал K , труд L і рівень «знань» E , накопичені в суспільстві. Випуск може змінюватися в часі тільки при зміні факторів виробництва K, L, E [3].

З позиції динаміки модель Солоу розглядається як замкнене єдине неструктуроване ціле, система виробляє один універсальний продукт, який може як споживатись, так і інвестуватись.

У динамічній моделі розглядають п'ять макро-економічних (ендогенних) змінних: Y – валовий внутрішній продукт (ВВП); I – валові інвестиції; C – фонд споживання; K – основні виробничі фонди; L – число зайнятого населення.

Змінні (Y, I, C) є показниками типу потоку (їхні значення накопичуються протягом року), змінна K , L – миттєві змінні (їхні значення можуть бути змінні в будь-який момент безперервного часу).

Модель Солоу задається системою рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} Y_t = F(K_t, L_t) \\ Y_t = I_t + C_t, \\ K_t = (1 - \mu)K_{t-1} + I_{t-1}, \\ L_t = (1 + \nu) \cdot L_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, T. \end{cases} \quad (1)$$

де $t=0$ – базовий рік;

T – кінцевий рік досліджуваного періоду;

K_0, I_0, L_0 – вважаються заданими.

Перше рівняння задає ВВП як виробничу функцію від ресурсів – основних виробничих фондів (ОВФ) і числа зайнятого населення, друге – розподіл ВВП на валові інвестиції та споживання. Третє рівняння – це рекурентне співвідношення для визначення основних виробничих фондів майбутнього року за значеннями вартості фондів та інвестицій поточного року. У цьому рівнянні μ – коефіцієнт вибуття (знос) основних виробничих фондів у розрахунку на рік. Цей коефіцієнт передбачається сталим. Інвестиції, зроблені в поточному році, матеріалізуються у фонди в майбутньому році, тобто лаг капіталовкладень дорівнює одному року. Четверте рівняння – це рекурентне співвідношення для визначення числа зайнятих у майбутньому році на основі числа зайнятих у поточному році. Як бачимо, це рівняння оснований на гіпотезі постійного річного темпу зросту числа зайнятих ν .

З точки зору класифікації елементів на статичні та динамічні, система (1) (кожен з яких є формалізованим записом елемента) може бути розтлумачено таким чином. Перше рівняння задає нелінійний статичний елемент (вхід – K_t, L_t , вихід – Y_t), друге рівняння – лінійний статичний елемент (вхід – Y_t , вихід – I_t, C_t), третє рівняння – лінійний динамічний елемент (вхід – K_{t-1}, I_{t-1} , вихід – K_t), четверте рівняння – лінійний динамічний елемент (вхід – L_{t-1} , вихід – L_t).

Таким чином, економіка у формі моделі Солоу, видимим чином неструктурована, насправді структурована в контур з оберненим зв'язком, як показано на рис. 1. Тим самим економіка у формі моделі Солоу є динамічною системою, оскільки в її складі є динамічні елементи [4].

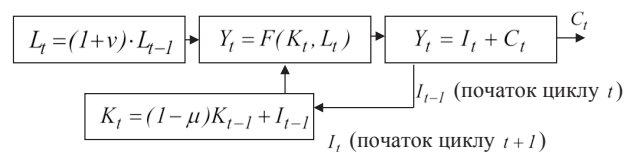


Рис. 1. Структурна схема динамічної моделі Солоу

На основі розкритого теоретичного матеріалу побудуємо модель Солоу для дослідження динаміки економічного розвитку України. Дані для побудови моделі подано в таблиці 1.

Показник L (вартість трудових ресурсів для держави на рік) розраховуємо як добуток зайнятого населення і середньомісячної заробітної плати помноженої на дванадцять місяців.

На основі наведених даних з таблиці 1 одержуємо економетричну модель виробничої функції вигляду

$$Y = 6.13 \cdot K^{0.148} \cdot L^{0.751}. \quad (2)$$

Коефіцієнт детермінації для цієї економетричної моделі становить 0.996, що є досить високим показником.

Таблиця 1

Статистичні дані про розвиток економіки України для побудови моделі Солоу

Рік	ВВП, млн. грн.	Зайняте населення, у середньому, тис. осіб	Середньомісячна заробітна плата, грн.	Вартість трудових ресурсів на рік, млн. грн. (L)	Залишкова вартість ОВФ, млн. грн. (K)
2000	170070	20 175,00	230	55683	466448
2001	204190	19 971,50	311	74533	503278
2002	225810	20 091,20	376	90651	512235
2003	267344	20 163,30	462	111785	538837
2004	345113	20 295,70	590	143693	587453
2005	441452	20 680,00	806	200016	661565
2006	544153	20 730,40	1 041	258964	774503
2007	720731	20 904,70	1 351	338906	993346
2008	948056	20 972,30	1 806	454511	1251178
2009	913345	20 191,50	1 906	461819	1597416
2010	1082569	20 266,00	2 239	544506	1731296
2011	1302079	20 324,20	2 633	642163	1780059
2012	1411238	20 354,30	3 026	739105	2135987
2013	1 454 931	20 404,1	3 265	799432	2245367

Щоб уникнути складнощів при подальшому розв'язанні диференціального рівняння, одержаного на основі (2), вдаємося до лінеаризації, тобто замінимо вихідне нелінійне рівняння лінійним, що приблизно описують процеси в системі.

Достатньою умовою можливості проведення лінеаризації математичної моделі елемента системи або системи в цілому є відсутність розривів неоднозначних функцій:

$$y(u) = y_0(u_0) + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 \Delta u + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)_0 \Delta u^2 + \dots \quad (3)$$

Якщо відхилення аргумента Δu досить малі, то можна обмежитися першими лінійними членами розкладання й розглядати замість нелінійної функції $y = f(u)$ лінійну:

$$y \cong y_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 u = y_0 + ku, \quad (4)$$

де y_0 – початкові умови параметрів системи.

Лінеаризувавши рівняння (2), одержуємо рівняння

$$Y = 73275.4 + 1.551 \cdot L + 0.095 \cdot K. \quad (5)$$

Адекватність відображення фактичних тенденцій рівняннями (2) і (5) проілюстровано на рис. 2.

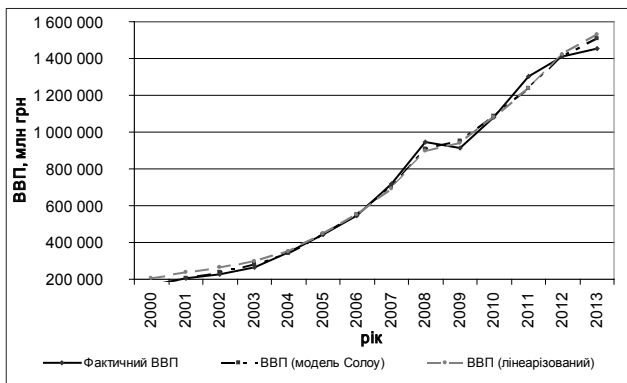


Рис. 2. Порівняння фактичних значень ВВП з отриманими значеннями на основі моделей (2) та (5)

Перейдемо до диференціального рівняння, продиференціювавши змінні в часі елементи K_t і L_t . Для простоти замінимо вираз $K_t = (1 - \mu)K_{t-1} + I_{t-1}$ на $K_t = (1 + v_K) \cdot K_{t-1}$. Тоді рівняння буде мати вигляд

$$Y = 73275.4 + 1.551 \cdot \left(\frac{v_L}{v_L - 1} \frac{dL}{dt} + L_0\right) + 0.095 \cdot \left(\frac{v_K}{v_K - 1} \frac{dK}{dt} + K_0\right), \quad (6)$$

$$\text{де } v_L = \sum_{i=1}^n \frac{L_t / L_{t-1}}{n}, \quad v_K = \sum_{i=1}^n \frac{K_t / K_{t-1}}{n}.$$

Початкові умови дорівнюють $L_0 = 55683$ і $K_0 = 446448$, а швидкості зміни показників у часі – $\frac{v_L}{v_L - 1} = 0.1883$ і $\frac{v_K}{v_K - 1} = 0.1167$.

Отримана модель (6) має передавальну функцію $W(s)$.

$$W(s) = \frac{1.64 \cdot s + 9.04}{s^2 + 13.88 \cdot s + 45.54}. \quad (7)$$

Для подальшого дослідження системи на стійкість необхідно одержати модель у просторі станів із записом диференціальних рівнянь у стандартній формі Коші (у вигляді системи рівнянь першого порядку):

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u, \\ y = C \cdot x + D \cdot u. \end{cases} \quad (8)$$

де, x – вектор змінних стану розміром $n \times 1$; u – вектор вхідних сигналів (вектор керування) розміром $m \times 1$; y – вектор вихідних сигналів розміром $p \times 1$. Крім того, A, B, C, D – сталі матриці. Матриця A має бути квадратною – розміром $n \times n$, матриця B має розмір $n \times m$, матриця C – $p \times n$ і матриця D – $p \times m$. Для систем з одним входом і одним виходом матриця D – скалярна величина.

Для визначення стійкості динамічної системи достатньо знайти матрицю сталих коефіцієнтів динамічної системи A . О. Ляпунов у своїй роботі «Загальна задача про стійкість руху» [5] показав, що при дослідженні стійкості руху необхідною і достатньою умовою було те, щоби дійсна частина всіх коренів характеристичного рівняння лінеаризованої системи ($\det(A - \lambda I)$), де I – одинична матриця, а λ – дійсне змінне) була від'ємною, тобто лежала в лівій напівплощині.

Умову стійкості соціально-економічної системи можна сформулювати в такий спосіб: щоб система була стійкою, необхідно й достатньо, щоб усі корені матриці сталих коефіцієнтів її характеристичного рівняння були лівими. Якщо хоча б один корінь правий, система нестійка. Якщо один з коренів дорівнює нулю, а інші – ліві, то система перебуває на границі

стійкості, тобто, будь-яке збурення може вивести її зі стану стійкості [1].

У нашому випадку матриця A має такий вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} -13,89 & -5,69 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

а характеристичне рівняння $\det(A - \lambda I)$ матриці A виглядає

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 13,89\lambda + 45,36. \quad (10)$$

У нашому випадку корені лежать у лівій напівплощині:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -5,302, \\ \lambda_2 &= -8,587. \end{aligned} \quad (11)$$

що говорить про стійкість динаміки розвитку досліджуваної системи.

У практичних дослідженнях для постійного моніторингу макросередовища, а саме економічного зростання, описана процедура є громіздкою, тому виникає практична задача отримання за допомогою символьних обчислень характеристичного рівняння для параметрів, що входять в умови стійкості.

У моделі економічного зростання Солоу, держава може керувати параметрами темпів збільшення капіталу в країні та темпами зайнятості населення та рівнем його добробуту, тобто параметрами v_L , v_K для забезпечення постійного позитивного економічного зростання. Відносно цих параметрів ми отримали характеристичне рівняння в символьному вигляді, яке має вигляд

$$\det(A - \lambda I) = \frac{(v_l v_k - v_l - v_k + 1)\lambda^2}{(v_l - 1)(v_k - 1)} + \frac{(2v_l v_k - v_l - v_k)\lambda}{(v_l - 1)(v_k - 1)} + \frac{v_l v_k}{(v_l - 1)(v_k - 1)}. \quad (11)$$

Використовуючи це рівняння та підставляючи точні значення v_L та v_K , можемо знайти корені λ для визначення динамічної стійкості розвитку економічної системи України використавши умови (10) та (11).

Висновки з проведеного дослідження. У статті запропоновано метод визначення динамічної стійкості економічного розвитку України. Використання для аналізу стійкості функціонування економічних систем моделей, здатних враховувати динаміку стану та керованість, відкриває широкі можливості формалізованого опису таких систем і застосування до них критеріїв стійкості. Враховуючи відносну легкість реалізації певних критеріїв, можливо відзначити, що це дозволяє відслідковувати стійкість функціонування економічної системи в динаміці, у режимі реального часу.

Одержано практичний результат, який підтверджує стійкість динаміки розвитку економіки України.

У статті одержано аналітичний вираз характеристичного рівняння для параметрів, що входять в умови стійкості економічного розвитку України.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Основы теории автоматического управления: учебн. / В.С. Булыгин, Ю.Г. Гришанин, Н.Б. Судзиловский и др.; под ред. Н.Б. Судзиловского. – М.: Машиностроение, 1985. – 512 с.
2. Моделирование экономической динамики: учебн. пособ. / Т.С. Клебанова, Н.А. Дубровина, О.Ю. Полякова, Е.В. Раевнева. – 2-е изд. – Х.: Издательский дом «ИНЖЭК», 2005. – 244 с.
3. Туманова Е.А. Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода: учебник / Е.А. Туманова, Л.Н. Шагас. – М.: Инфра - М, 2004. – 400 с.
4. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем / В.А. Колемаев. – М.: Юнити-Дана, 2005. – 295 с.
5. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т2. – 472 с.
6. Романенко В.Д. Синтез багатовимірних координуючих систем керування з різнотемповою дискретизацією в детермінованому середовищі / В.Д. Романенко, Ю.Л. Мілявський // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2011. – Вип. 4. – С. 7-20.
7. Варталян В.М. Алгебраические критерии исследования устойчивости динамических систем / В.М. Варталян. – Х.: Госуд. аэрокосмический университет «Харьк. авиац. ин-т», 2000. – 90 с.