СЕКЦІЯ 9
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.8

Горбачук В.М.
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова
Національної академії наук України

РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ ЄВРОПЕЙСЬКИМИ ДЕРЖАВНИМИ ДІЯЧАМИ

Розвиток математичної економіки європейськими державними діячами став успішною відповіддю на актуальні соціально-економічні виклики. З розвитком технологій це дозволило європейцям досягнути найвищих стандартів життя. У статті показано роль і місце українського вченого М.В. Остроградського у розвитку теорії та практики рівноваги при лінійних нерівностях.
Ключові слова: система лінійних нерівностей, принцип Гамільтона-Остроградського, лема Фаркаша, симплекс-метод, рівновага.

Горбачук В.М. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ ЕВРОПЕЙСКИМИ ГОСУДАРСТВЕННЫМИ ДЕЯТЕЛЯМИ
Развитие математической экономики европейскими государственными деятелями стало успешным ответом на актуальные социально-экономические вызовы. С развитием технологий это позволило европейцам достичь наивысших стандартов жизни. В статье показаны роль и место украинского ученого М.В. Остроградского в развитии теории равновесия при линейных неравенствах.
Ключевые слова: система линейных неравенств, принцип Гамильтона-Остроградского, лемма Фаркаша, симплекс-метод, равновесие.

Gorbachuk V.M. DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL ECONOMICS BY THE EUROPEAN STATESMEN
The development of mathematical economics by the European statesmen became a successful answer to the topical social-economic challenges. This with technology development granted the highest standards of living for the Europeans. The role and place of the Ukrainian scientist Ostrogradsky in development of theory and practice of equilibrium under linear inequalities have been shown.
Keywords: system of linear inequalities, Hamilton-Ostrogradsky principle, Farkas lemma, simplex-method, equilibrium.

Постановка проблеми полягає у визначенні ролі європейських державних діячів у розвитку математичної економіки. Математична економіка й новітні технології доповнюють одне одного, створюють взаємний попит і стимулюють розвиток одне одного. Незважаючи на застосування математичної економіки у плануванні колишнього СРСР, вона мало певні ідеологічні обмеження. Завдяки увазі до математичної економіки та до її застосувань академік Глушков зумів вивести вітчизняний розвиток обчислювальних методів, обчислювальної техніки, інформаційно-комунікаційних технологій на сучасний рівень, подолавши ідеологічні обмеження у кібернетиці [1].

Аналіз проблеми бере початок від зустрічі автора на міжнародній конференції у м. Ялта у 2008 р. з іноземним членом Національної академії наук України (НАНУ) і почесним доктором Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАНУ Пардалосом (Pardalos), який родом з Греції і працює у США. У 2007 р. Пардалос викладав курс «Історія індустріальної технології» в університеті Флориди. Приділяючи важливе значення формуванню наукової проблематики з античних часів, він редагував два видання енциклопедії оптимізації [10]. Друге видання включає статтю про академіка НАНУ Шора [49], з яким автор часто обговорював задачі з математичної економіки.

Нерозв'язана раніше частина проблеми в Україні – це визначення ролі державного керівництва у розвитку математичної економіки.

Мета роботи – показати високий рівень наукової компетенції європейських державних діячів за умов конкуренції і демократії, який дозволяє європейцям досягати найвищих стандартів життя

Основні результати проілюстровано на прикладі розвитку лінійного програмування. Поліедри, лінійні нерівності та лінійне програмування представляють три сторони однієї й тієї ж проблемної області – геометрична, алгебраїчна та оптимізаційна. Уявлення про цю область вперше сформував французький математик Фур'є (Fourier) у 1820-х рр. Починаючи з 3-го тисячоліття до н.е., в Єгипті вивчали задачі вимірювання об'ємів таких поліедрів, як зрізані піраміди, паралелепіпеди тощо. Починаючи з 5-го ст. до н.е., у Греції ретельно досліджували поліедри вимірності 2 і 3; Піфагор (Pythagor) й Архімед (Archimedes) відомі своїми теоремами і школами, а Платон (Plato) й Евклід (Euclid) – своїми працями. У 100 р. до н.е. у Китаї Чіу-Чанг Суан-Шу (Chiu-Chang Suan-Shu) опублікував 9 книг з арифметики, зокрема із задачами на вимірювання об'ємів поліедрів. У 17-му ст. французький математик Декарт (Descartes) відкрив формулу $u + f = e + 2$ для 3-вимірних простих поліедрів, де u, e, f – число вершин, ребер, граней відповідно. У 18-му ст. цю формулу перевідкрив Ейлер (Euler) й започаткував комбінаторний напрямок поліедральної теорії.

Фур'є (1768–1830) у 1780 р. за сприяння єпископа м. Осер поступив у військову школу при бенедиктинському монастирі. У 1787 р. Фур'є поступив в Абатство Святого Бенедикта на Луарі, де збирався прийняти сан. Коли революційний декрет жовтня 1789 р. скасував релігійні обітниці та конфіскував майно церкви і чернецьких орденів, Фур'є повернувся в м. Осер і став викладати математику, риторику, історію, філософію у школі, яку сам закінчив.

У лютому 1793 р. у м. Осер відбулися бурхливі дебати щодо принципів виділення людей від регіону на вимогу Конвенту. Фур'є виступив на цих дебатах і запропонував план, який підтримали. Фур'є отримав пропозицію вступити у місцевий комітет нагляду, яку він прийняв. Протягом 1793 р. комітет, який спочатку був створений, щоб покласти край контрреволюційній діяльності іноземців та мандрівників, став частиною революційного терору і був зобов'язаний арештовувати «тих, хто поведінкою, зв'язками чи словами, сказаними чи написаними, виявили себе прихильниками тиранії чи федералізму та ворогами свободи». Фур'є не бажав брати участь у цьому і подав письмову заяву про вихід з комітету. Заяву відхилили.

У справах комітету Фур'є відправився в департамент Луаре. Проїжджаючи біля м. Орлеан, він став учасником конфлікту, висловившись на захист глав кількох місцевих родин, коли представник Конвенту здійснював численні арешти й збирався застосувати пересувну гільйотину. Тому у жовтні 1793 р. повноваження Фур'є були відкликані з неможливістю поновлення. У червні 1794 р. Фур'є став президентом революційного комітету в м. Осер і відбув на зустріч с Робесп'єром, але в липні 1794 р. після повернення в м. Осер Фур'є заарештували. Проте в результаті перевороту 9-го термідору заарештували й стратили Робесп'єра, а Фур'є звільнили. У жовтні 1794 р. декретом Конвенту в Парижі була організована Нормальна школа, де на гроші Республіки навчалися 1 500 студентів, майбутніх шкільних вчителів. Студенти призначалися від різних округів. Оскільки м. Осер призначило свого кандидата у той час, коли Фур'є був ув'язненим, то Фур'є був номінований сусіднім округом Сен-Флорантен і прийнятий до школи після підтвердження з м. Осер. У школі викладали Лагранж, Лаплас, Монж. Заняття розпочалися у січні 1795 р., але у травні 1795 р. школа призупинила свою діяльність.

Водночас опоненти Фур'є написали листа в Нормальну школу, стверджуючи, що не можна готувати вчителів для дітей з тих кандидатів, які були обрані при Робесп'єрі. У травні 1795 р. в м. Осер прийшло два накази: обеззброїти учасників терору, зокрема Фур'є; заарештувати тих, хто відмовився здати зброю. Фур'є відмовився від отриманої посади у Політехнічній школі й написав листа у муніципалітет м. Осер, але у червні 1795 р. був удруге заарештований. Ув'язнений Фур'є написав багато листів на свій захист, стверджуючи, що був заарештований при Робесп'єрі і зберіг життя завдяки перевороту 9-го термідору. У серпні 1795 р. Фур'є звільнили.

Якщо спочатку Фур'є був на позиціях якобінця, то з часом став поміркованим лібералом. Він почав підтримувати ідеї рівності до роботи в комітеті, про що свідчить лист ув'язненого Фур'є у червні 1795 р. Робота Фур'є в комітеті була пов'язана з бажанням захисту Республіки від агресії з боку Бельгії та повстання у Вандеї.

У вересні 1795 р. Фур'є відновився на посаді у Політехнічній школі, яка готувала військових і директором якої був Монж. У 1797 р. Фур'є замінив Лагранжа на чолі кафедри аналізу та механіки. Займаючись підбором учнів, Фур'є звертав увагу на талант. Одним з його учнів був Пуассон, який замінив Фур'є у школі на час єгипетського походу.

У 1798 р. Наполеон розпочав свій єгипетський похід, куди запросив Фур'є та Монжа науковими радниками. Під час окупації Єгипту Фур'є працював у французькій адміністрації, керував археологічними розкопками і формуванням системи освіти. Фур'є брав участь у створенні Каїрського інституту і був одним з 12 членів математичного відділення, куди входили Монж і Наполеон. Фур'є обрали секретарем Каїрського інституту.

У 1801 р. Фур'є повернувся у Францію і вдруге відновився у Політехнічній школі. Наполеон запропонував йому посаду префекта департаменту Ізер, на якій Фур'є керував осушенням боліт в Bourgoin та будівництвом дороги Гренобль–Турин. Водночас Фур'є працював над збіркою єгипетських знахідок і писав історичну довідку з Древнього Єгипту. Збірку публікували в 1810 р. після того, як Наполеон вніс до неї ряд змін. У 1809 р. Фур'є отримав від Наполеона титул барона й орден Почесного легіону.

У 1815 р. Наполеон після повернення із заслання на о. Ельба призначив Фур'є префектом Рони. Фур'є працював директором Статистичного бюро, а в 1817 р. його обрали членом Французької академії (у 1816 р. король Людовик XVIII скасував це рішення) [2].

Нерівності виявилися важливими для механіки. У 1717 р. Йоган Бернуллі (Johann Bernoulli) I зі Швейцарії встановив принцип віртуальної швидкості. Вектор y називається віртуальною швидкістю у положенні x^* центру мас, що належить деякій обмеженій області (region) R, коли в R існує крива (curve) C, до якої є дотичною напівпряма

$$\{x^* + \lambda y : \lambda \geq 0\}. \tag{1}$$

Нехай центр мас перебуває у положенні x^* внаслідок сили b (тобто діє сила $\|b\|$ в напрямі вектора b). За умови

$$\{y \text{ є віртуальною швидкістю} \Rightarrow (-y) \text{ є віртуальною швидкістю}\}, \tag{2}$$

принцип віртуальної швидкості говорить, що центр маси перебуває в рівновазі тоді й тільки тоді, коли для будь-якої віртуальної швидкості y має місце

$$b^T y = 0. \tag{3}$$

Якщо R – множина векторів x, які задовольняють системі

$$f_i(x) = 0,\ i = 1,\ldots,m, \tag{4}$$

для певних гладких функцій $f_i(x): R^n \to R$, $i = 1,\ldots,m$, а градієнти $\nabla f_i(x^*)$, $i = 1,\ldots,m$, є лінійно незалежними, то задовольняється умова (2), а умова (1) рівносильна системі $[\nabla f_i(x^*)]^T y = 0$, $i = 1,\ldots,m$, [51; 52; 70–74]. З рівності (3) для певних дійсних чисел (множників Лагранжа) λ_i, $i = 1,\ldots,m$, випливає

$$b + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0. \tag{5}$$

Рівняння (5) та система (3) дають стільки рівнянь, скільки є невідомих λ_i, $i = 1,\ldots,m$, і компонентів x^*. Звідси можна знайти x^*. Рівняння (5) можна розуміти як суму сил $\lambda_i \nabla f_i(x^*)$ для подолання перешкод (4), яка нейтралізує силу b. Лагранж досліджував також аналог динамічної рівноваги.

Необхідною умовою мінімізації (максимізації) диференційованої функції $f(x): R^n \to R$ при обмеженні $g(x) = 0$ з диференційованою функцією $g(x): R^n \to R$ є рівність $\nabla f(x^*) + \lambda \nabla g(x^*) = 0$ для деякого дійсного числа λ [53, 67–69]. Якщо замість одного обмеження розглядати m обмежень $g_i(x) = 0$, $i = 1,\ldots,m$, з диференційованими функціями $g_i(x): R^n \to R$, то необхідні умови мінімізації (максимізації) диференційованої функції $f(x): R^n \to R$ при цих обмеженнях задають стаціонарні точки функції Лагранжа

$$L(x,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i \nabla g_i(x) : R^{n+m} \to R .$$

Принцип Фур'є узагальнює принцип (1) віртуальної швидкості на випадок допустимої області R [31; 35; 66], яка задається системою нерівностей (обмеження часто є односторонніми), а не обов'язково системою (3) рівностей: центр мас x^*, чиє положення обмежується областю R, під силою b перебуває в рівновазі тоді й тільки тоді, коли для будь-якої віртуальної швидкості y має місце

$b^T y \le 0$. (6)

Курно теж вивчав систему обмежень-нерівностей $f_i(x) \ge 0$, $i = 1,\ldots,m$, для певних диференційованих функцій $f_i(x): R^n \to R$, $i = 1,\ldots,m$ [6]. Якщо центр мас x^* під силою b перебуває у рівновазі,

$$f_i(x^*) = 0,\ i = 1,\ldots,t, \tag{7}$$

$$f_i(x^*) > 0,\ i = t+1,\ldots,m, \tag{8}$$

то сума сил $\sum_{i=1}^{t}\lambda_i \nabla f_i(x^*)$ для подолання перешкод (7) при певних $\lambda_i \ge 0$, $i = 1,\ldots,t$, зберігає рівновагу:

$$b + \sum_{i=1}^{t}\lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0 . \tag{9}$$

Звідси випливає лема Фаркаша для лінійних функцій $f_i(x): R^n \to R$, $i = 1,\ldots,m$. Якщо y – віртуальна швидкість у точці x^*, то $[\nabla f_i(x^*)]^T y \ge 0$, $i = 1,\ldots,t$. Останнє співвідношення та рівність (9) дають нерівність (6). Курно бачив застосування системи (7)–(8) для механіки [7–9], а не для економіки [30, 65, 81].

Узагальнюючи принцип Фур'є (6) для механічної рівноваги, Гаусс вивів новий загальний принцип найменшої протидії: рух системи центрів мас, чиє положення є обмеженим, якнайбільше відповідає вільному руху [3, 4, 38–41].

Принцип Фур'є (6) також називають принципом стаціонарної дії Гамільтона–Остроградського. Остроградський зазначив, що віртуальні швидкості у положенні центра мас при обмеженнях часто можна охарактеризувати системою лінійних нерівностей [75]

$$(a_i)^T y \ge 0,\ i = 1,\ldots,t . \tag{10}$$

Коли $a_1,\ldots,a_t$ лінійно незалежні, то центр мас під силою b перебуває в рівновазі за умови

$$b + \sum_{i=1}^{t}\lambda_i a_i + \sum_{i=t+1}^{m}\lambda_i a_i = 0$$

для деяких $a_{t+1},\ldots,a_m$, які дають множину лінійно незалежних векторів $a_1,\ldots,a_m$, і певних $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in R$. Якщо задовольняє системі (10), то задовольняє принципу (6). Оскільки $a_1,\ldots,a_m$ лінійно незалежні, то $\lambda_1,\ldots,\lambda_t \ge 0$, $\lambda_i = 0$, $i = t+1,\ldots,m$. Якщо $(a_j)^T y = 0$, $j \in \{1,\ldots,t\}$, то λ_j може мати будь-який знак [76]. Щоб отримати лему Фаркаша, Остроградський припускав лінійну незалежність лінійних нерівностей, а Курно – принцип механіки. Перші строгі доведення загальної леми Фаркаша отримали Фаркаш і Мінковський.

Український математик Михайло Васильович Остроградський (1801–1862) народився у с. Пашенна (зараз с. Пашенівка Хорішківської сільради Козельщинського району Полтавської області) Кобиляцького повіту Полтавської губернії у козацько-старшинський родині, яка походить від Матвія Остроградського, сотника Говтвянської сотні Миргородського полку у с. Говтва (1691–1715), полкового судді у м. Миргород (1715–1734), учасника багатьох військових кампаній. Матвій Остроградський підписав обидві Коломацькі чолобитні 1723 р., складені влітку 1723 р. у військовому таборі над р. Коломак і вручені Петру I канцеляристом І. Романовичем. У Коломацьких чолобитних козацька старшина домагалася відновлення державних прав України, ліквідації Малоросійської колегії і дозволу обрати нового гетьмана України. У відповідь на ці чолобитні царський уряд наказав заарештувати і ув'язнити в Петропавловській фортеці наказного гетьмана П. Полуботка, полковника Д. Апостола, генерального бунчужного Я. Лизогуба, генерального осавула В. Жураховського, управителя Генеральної Військової Канцелярії Д. Володковського і ряд інших старшин, зокрема М. Остроградського.

Михайло Остроградський навчався у пансіоні при при Полтавській гімназії з 1810 р., на фізико-математичному факультеті Харківського університету з 1817 р., відмінно склав заліки з усіх дисциплін у 1820 р. Ректор університету Осиповський мав намір надати Остроградському відразу звання кандидата математичних наук, але рада відділу фізико-математичних наук висловилась проти цього і запропонувала Остроградському складати екзамени вдруге. Остроградський успішно склав усі екзамени, крім екзамену з філософії. Міністерство освіти і духовних справ Росії вирішило звільнити з посади ректора Осиповського, а Остроградському запропонувало складати екзамени втретє. Остроградський відмовився екзаменуватися втретє, залишився без атестата про закінчення Харківського університету і вирішив їхати в центр світової науки того часу– Париж.

З 1822 р. Остроградський навчається у College de France під керівництвом таких видатних учених, як: Лаплас, Фур'є, Ампер, Пуассон, Коші. За їх рекомендацією Остроградський починає працювати в колегіумі Генріха (Анрі) IV. У 1826 р. Остроградський подав Паризькій академії наук свою першу наукову працю, яку було схвалено і надруковано. Остроградського Лаплас приймав вдома як свого учня і члена родини. Коші визволив Остроградського з в'язниці для боржників, заплативши всім його кредиторам (приблизно через сто років подібну послугу у США зробив композитор Рахманінов для Ігоря Сікорського, засновника авіакомпанії Sikorsky Aircraft).

Лаплас (1749–1827) опублікував у 1766 р. у м. Турин роботу з механіки, за яку Д'Аламбер рекомендував Лапласа на посаду викладача математики у Військовій академії. У 1785 р. член Паризької академії наук Лаплас на одному з екзаменів високо оцінив знання 17-річного абітурієнта Бонапарта. Пізніше Наполеон нагородив Лапласа титулом графа Імперії і призначив на посаду Міністра внутрішніх справ. Після реставрації Бурбонів Лаплас також отримав титул маркіза і члена палати перів.

Коші (1789–1857) походить з родини високого поліцейського чиновника Франції. Коли у 1799 р. до влади прийшов Наполеон Бонапарт, батько Коші став Генеральним секретарем сенату, працюючи безпосередньо з Лапласом. Після закінчення Ecole Centrale du Pantheon, найкращої тоді школи у Парижі, Коші у 1810–1812 рр. працював на керівних інженерних посадах Морського міністерства у порті Шербур, де Наполеон будував військово-морську базу. З 1812 р. Коші працює у Міністерстві внутрішніх справ. У 1816 р. після повернення до влади сім'ї Бурбонів і відновлення Французької академії король Луї XVIII призначив Коші академіком на місце математика Монжа. Після французької революції 1830 р. Коші виїхав до Швейцарії, а потім до Італії. У 1831 р. король Сардинії створив для Коші кафедру теоретичної фізики у м. Турин. У 1833–1838 рр. Коші був учителем онука французького короля Карла X в екзилі у м. Прага (Чехія), за що отримав титул барона. Коші є одним із засновників Institut Catholique у Парижі.

У 1828 р. Остроградський прибув до Петербурга, де його було взято під суворий таємний нагляд поліції. Остроградський мріяв про організацію на європейський лад наукової роботи на рідній землі, що підтримувала група вітчизняних вчених, яка прагнула дізнатися про найновіші погляди, методи в галузі математичного аналізу, механіки, фізики тощо. У 1828 р. Петербурзька Академія наук обрала Остроградського ад'юнктом прикладної математики, у 1830 р. – екстраординарним академіком, у 1831 р. – ординарним академіком. Остроградський викладав у таких закладах, як: Морський кадетський корпус, Інститут інженерів шляхів сполучення, Головний педагогічний інститут, Головне інженерне і Михайлівське артилерійське училище. У 1837 р. Остроградський видав лекції, які він читав у Морському кадетському корпусі, під назвою «Лекції з алгебраїчного і трансцендентного аналізу». З 1847 р. Остроградський працював при штабі головного начальника військових навчальних закладів наглядачем за викладанням математики. Остроградський як лектор користувався величезною популярністю. Його лекції відвідували не лише студенти, а й викладачі, професори, відомі математики. Усіх приваблювала його система викладання предмета – широка загальність теми, виразність і стислість викладу. Остроградський був енергійним проповідником прогресивних педагогічних ідей, рекомендуючи в навчальному процесі додержуватися таких вимог: збуджувати в учнів інтерес; добиватися свідомого засвоєння; розвивати самостійне мислення; вести точний науковий виклад; застосовувати наочність; проводити практичні роботи. Остроградський вказував, що навчання повинно бути реальним, близьким до життя, а вчителі повинні любити свою справу.

Остроградський знав напам'ять значну частину творів Тараса Шевченко, які охоче декламував. З такою самою щирою повагою і любов'ю ставився до Остроградського і Шевченко, який приїздив до Остроградського у 1858 р.

Остроградського обрали почесним доктором Гельсінгфорського (у м. Хельсінкі Фінляндії), Олександрійського (Віленського у м. Вільнюс Литви), Київського, Московського університетів, членом Американської (1834), Туринської (1841), Римської (1853) академій наук, членом-кореспондентом Паризької академії наук (1856). Постановою Кабінету Міністрів України (КМУ) № 1814 від 16.11.1998 р. Полтавському обласному інститутові післядипломної освіти педагогічних працівників присвоєно ім'я М.В. Остроградського. У 2001 р. ЮНЕСКО внесла М.В. Остроградського до переліку видатних математиків світу. Розпорядженням КМУ № 92-р від 07.03.2007 р. Кременчуцькому державному політехнічному університету присвоєно ім'я М.В. Остроградського.

Військове міністерство Росії доручило академікові Остроградському вивчити деякі питання, пов'язані з теорією артилерійської стрільби, у зв'язку з чим Остроградський написав кілька оригінальних праць з балістики, наприклад: «Мемуар про рух сферичного снаряда в повітрі» (1841), «Про вплив пострілу на лафет гармати» (1842) та інші. Остроградський працював також у галузі теорії ймовірностей. Перша його праця з теорії ймовірностей – про помилки, які трапляються в роботі судових трибуналів. Кожна його праця в цій галузі закінчувалася практичними порадами, формулами, таблицями.

Фур'є одним з перших визнав важливість нерівностей для прикладної математики – механіки, задачі найменших квадратів, підтримки ваги (де нерівності представляють межі безпечного завантаження), виборів (де нерівності представляють більшості), теорії ймовірності [48].

Фур'є також одним з першим зазначив зв'язок між лінійними нерівностями, поліедрами й оптимізацією, запропонувавши початкову версію симплекс-методу [33–37, 66] для задачі мінімізації ζ на 3-вимірному поліедрі точок $\{\eta,\xi,\zeta\}$, який визначається системою лінійних нерівностей

$$\zeta \ge \alpha_i\xi+\beta_i\eta+\gamma_i,\ \zeta \ge -\alpha_i\xi-\beta_i\eta-\gamma_i,\ i=1,\dots,m.$$

Задача зводиться до мінімізації $\|Ax-b\|_\infty$ (яка вивчалася раніше [54–58]) для деяких матриці A вимірності $m\times 2$ і вектора b вимірності m, де $\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|\}$ означає l_∞-норму. Фур'є передбачав узагальнення свого методу для більших вимірностей. Мінімізація $\|Ax-b\|_\infty$ вивчалася згодом [83].

Запропонований Фур'є метод розв'язання довільної системи лінійних нерівностей [34; 35; 66], який складається з послідовного виключення змінних, зараз відомий як метод Фур'є–Моцкіна виключення [5; 32; 35; 50; 64; 66].

Дослідження геометрії та комбінаторної класифікації 2- та 3-вимірних поліедрів неявно припускали умови теореми скінченного базису для політопів. Формування лінійного алгебри супроводжувалося ідеями двоїстості та полярності, зокрема вивченням полярних властивостей поліедрів [42–44; 77–79; 82]. Зазначалася двоїстість вершин і граней 3-вимірних політопів [78; 79; 82]: якщо вершинами 3-вимірного політопа, що містить початок координат, є $c_1,\dots,c_t$, а його грані задаються $(a_i)^T x=1$, $i=1,\dots,m$, то $a_1,\dots,a_m$ є вершинами політопа з гранями $(c_i)^T x=1$, $i=1,\dots,t$. Якщо має місце полярність 3-вимірного проективного простору, то множина площин, дотичних до поверхні опуклої множини, сама формує поверхню опуклої множини [29; 82].

Алгебраїчне вивчення лінійних нерівностей показало, що необхідною й достатньою умовою нетривіального невід'ємного розв'язку системи лінійних рівнянь $Ax=0$ є те, що не існує від'ємної лінійної комбінації yA рядків матриці A [47]. Для доведення твердження застосовувалася індукція за числом рядків матриці A. Твердження означає, що нерівність $yA<0$ має розв'язок тоді й тільки тоді, коли $x=0$ – єдиний розв'язок системи $Ax=0$, $x\ge 0$.

Вивчення лінійних нерівностей вело до засад алгебраїчної теорії поліедрів. Фізик Фаркаш поширив доведення принципу Остроградського на загальний випадок [11; 12], використовуючи виключення стовпців матриці A:

$$\{Ax\le 0 \Rightarrow cx\le 0\} \Leftrightarrow \{yA=c \text{ для деякого } y\ge 0\}. \quad (11)$$

Нове простіше доведення леми Фаркаша (11) використовувало виключення змінних [13; 14]. Непуста множина C точок в евклідовому просторі називається (опуклим) конусом, якщо

$$\{\lambda,\mu\ge 0,\ x,y\in C \Rightarrow \lambda x+\mu y\in C\}.$$

Конус називається поліедральним, коли $C=\{x: Ax\le 0\}$ для деякої матриці A, тобто коли C є перетином скінченного числа лінійних напівпросторів. Лінійним напівпростором називають множину виду $\{x: ax\le 0\}$ для деякого нетривіального вектор-рядка a. Конус, скінченно генерований векторами $x_1,\dots,x_m$, – множина $cone\{x_1,\dots,x_m\}=\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i : \lambda_1,\dots,\lambda_m\ge 0\}$, тобто найменший опуклий конус, який містить ці вектори. Фаркаш показав [15], що

$$\text{конус є поліедральним} \Leftarrow \text{конус є скінченно генерованим.} \quad (12)$$

Це доводиться двоїстою формою методу Фур'є–Моцкіна виключення, тобто виключенням обмежень. Фаркаш дав ще простіше доведення леми (11), використовуючи виключення змінних [16]. У застосуваннях лінійних нерівностей для механіки й математики [18–28; 80] Фаркаш зазначив, що:

$$\{\{x : Ax \le 0\} = cone\{x_1, \ldots, x_m\}\}$$

$$\{\{c : Ax \le 0 \Rightarrow cx \le 0\} = \{c : c\,y_i \le 0,\ i = 1, \ldots, m\}\}. \quad (13)$$

Це свідчить про принцип двоїстості – взаємну заміну змінних і коефіцієнтів. Тоді співвідношення (11)–(13) доповнюють твердження (12) [84–86]:

конус є поліедральним $\Leftarrow$ конус є скінченно генерованим.

Матриця A вимірності $m \times n$, що складається з m рядків і n стовпців, має повний ранг за рядками (стовпцями), коли $rank\,A = m$ ($rank\,A = n$). Починаючи з теорії чисел, Мінковський дійшов до питань опуклих множин та їхніх об'ємів [61], а також лінійних нерівностей [59, 62]:

конус $\{x : Ax \le 0\}$ є поліедральним $\Rightarrow$ конус є скінченно генерованим;

$rank\,A = n$ $\Rightarrow$ конус є генерованим променями,

кожний з яких визначається $(n-1)$ лінійно незалежними рівняннями,

які задовольняють $Ax = 0$. (14)

Звідси доводиться лема Фаркаша (11) за умови $rank\,A = n$.

Підмножина Λ у просторі R^n називається групою, коли $0 \in \Lambda$, а також

$x, y \in \Lambda \Rightarrow x + y \in \Lambda,\ -x \in \Lambda$.

Група Λ генерується векторами $a_1, \ldots, a_m$, коли $\Lambda = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i : \lambda_i \in Z, i = 1, \ldots, m\}$. Група називається решіткою, коли її можна генерувати лінійно незалежними векторами. Ці вектори називаються базисом решітки.

Мінковський показав, що без зменшення загальності можна вважати поліедральний конус $\{x : Ax \le 0\}$ повновимірним (охоплюючим увесь простір), що уможливлює $Ax < 0$. Якщо цей конус генерується векторами $y_1, \ldots, y_t$, то має місце частина співвідношення (13):

$$\{c : Ax \le 0 \Rightarrow cx \le 0\} = \{c : c\,y_i \le 0,\ i = 1, \ldots, t\}.$$

Тоді $\{c : c\,y_i \le 0,\ i = 1, \ldots, t\}$ є поліедральним конусом, а тому є скінченно генерованим променями за співвідношенням (14). Кожний такий промінь є добутком рядка матриці A і невід'ємного числа. Тому кожний вектор-рядок c є невід'ємною комбінацією рядків матриці A, що доводить лему Фаркаша (11). Оскільки Мінковський явно зазначив, що конус генерується рядками матриці A, то знав про двоїстість між променями й нерівностями.

Мінковський також зазначив, що неоднорідний випадок $Ax \le b$ зводиться до однорідного випадку $Ax - \lambda b \le 0$ введенням нової змінної.

Мінковський ввів кілька таких геометричних понять, як опорна площина, екстремальна точка, полярне тіло. Він показав [45; 46; 60; 61; 63], що:

K є компактною опуклою множиною в R^3, для якої 0 є внутрішньою точкою

$\Rightarrow$ для полярного тіла $K^* = \{y : y^T x \le 1$ для всіх $x \in K\}$ початок координат 0 теж є внутрішньою точкою, причому $(K^*)^* = K$.

Висновки полягають у тому, що суспільний попит є важливим фактором для адекватних відповідей суспільних лідерів, формування й організації наукової проблематики, науково-технічного прогресу.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Взаємодія централізації і децентралізації у міждисциплінарній кібернетиці академіка Глушкова / А.П. Великий, В.М. Горбачук, Ю.М. Єрмольєв, П.С. Кнопов. – К. : Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2013. – С. 241–243.
2. Физики : биографический справочник / ред. А. И. Ахиезер. – 2-е изд., испр. и дополн. – М. : Наука, 1983. – С. 286.
3. Carl Friedrich Gauss Werke. Vol. V. – Gottingen: Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, 1867.
4. Carl Friedrich Gauss Werke. Vol. V. – Hildesheim: G. Olms, 1973.
5. Cournot A. A. Sur le calcul des conditions d'inegalite, annonce par M. Fourier // Bulletin des Sciences Mathematiques, Astronomiques, Physiques et Chimiques. – 1826. – 6. – P. 1–8.5.
6. Cournot A. A. Extension du principe des vitesses virtuelles au cas ou les conditions de liaison du systeme sont exprimees par des inegalites. – Bulletin des Sciences Mathematiques, Astronomiques, Physiques et Chimiques. – 1827. – 8. – P. 165–170.
7. Cournot A. A. Memoire sur le mouvement d'un corps rigide, soutenu par un plan fixe // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 1830. – 5. – P. 133–162.
8. Cournot A. A. Du mouvement d'un corps sur un plan fixe, quand on a egard a la resistance du frottement, et qu'on ne suppose qu'un seul point de contact // Ibid. – P. 223–249.
9. Cournot A. A. Du mouvement d'un corps sur un plan fixe, quand on a egard a la resistance du frottement // Ibid. – 1832. – 8. – P. 1–12.
10. Encyclopedia of optimization. 2-nd edition. C. A. Floudas, P. M. Pardalos (eds.) – Springer, 2009. – 4626 p.
11. Farkas Gy. A Fourier-fele mechanikai elv alkalmazasai // Mathematikai es Termeszettudomanyi Ertesito. – 1894. – 12. – P. 457–472.
12. Farkas J. Uber die Anwendungen des mechanischen Princips von Fourier // Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. – 1895. – 12. – P. 263–281.
13. Farkas Gy. A Fourier-fele mechanikai elv alkalmazasainak algebrai alapjarol // Mathematikai es Physikai Lapok. – 1896. – 5. – P. 49–54.
14. Farkas J. Die algebraischen Grundlagen der Anwendungen des Fourier'schen Princips in der Mechanik // Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. – 1897-1899. – 15. – P. 25–40.
15. Farkas Gy. Parameteres modszer Fourier mechanikai elvehez // Mathematikai es Physikai Lapok. – 1898. – 7. – P. 63–71.
16. Farkas Gy. A Fourier-fele mechanikai elv alkalmazasanak algebrai alapja Mathematikai es Termeszettudomanyi Ertesito. – 1898. – 16. – P. 361–364.
17. Farkas J. Die algebraische Grundlage der Anwendungen des mechanischen Princips von Fourier // Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. – 1898. – 16. – P. 154–157.
18. Farkas J. Allgemeine Principien fur die Mechanik des Aethers // Archives Neerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles (2). – 1900. – 5. – P. 56–75.
19. Farkas Gy. Vectortan es az egyszeru inaequatiok tana. – Kolozsvar, 1900.
20. Farkas J. Theorie der einfachen Ungleichungen // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 1902. – 124. – P. 1–27.
21. Farkas J. Beitrage zu den Grundlagen der analytischen Mechanik // Ibid. – 1906. – 131. – P. 165–201.
22. Farkas Gy. A Mechanika Alaptanai. – Kolozsvar: Kolozsvari egyetemi eloadasok konyomata, 1914.
23. Farkas Gy. Nemvonalas egyenlotlensegek vonalassa tetele // Mathematikai es Termeszettudomanyi Ertesito. – 1917. – 35. – P. 41–50.
24. Farkas Gy. Multiplicatoros modszer negyzetes alakokhoz // Ibid. – P. 51–53.
25. Farkas Gy. Egyenlotlensegek alkalmazasanak uj modjai // Ibid. – 1918. – 36. – P. 297–308.
26. Farkas Gy. A linearis egyenlotlensegek kovetkezmenyei // Ibid. – P. 397–408.
27. Farkas J. Stabiles Gleichgewicht ohne Potential // Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. – 1923. – 32. – P. 43–50.
28. Farkas Gy. Alapvetes az egyszeru egyenlotlensegek vektorelmeletehez // Mathematikai es Termeszettudomanyi Ertesito. – 1926. – 43. – P. 1–3.

29. Fenchel W. Convexity through the ages / Convexity and its applications. P. M. Gruber, J. M. Wills (eds.) – Basel: Birkhauser, 1983. – P. 120–130.
30. Fisher I. Cournot forty years ago // Econometrica. – 1938. – 6. – P. 198–202.
31. Fourier J. B. J. Memoire sur la statique, contenant la demonstration du principe des vitesses virtuelles, et la theorie des momens // Journal de l'Ecole Polytechnique. – 1798. – Tome 2. – Cahier 5. – P. 20–60.
32. Fourier J. B. J. Analyse des travaux de l'Academie Royale des Sciences. Pendant l'annee 1823. Partie mathematique // Histoire de 1'Academie Royale des Sciences de l'Institut de France. – 1826. – 6. – P. xxix–xli.
33. Fourier J. B. J. Solution d'une question particuliere du calcul des inegalites // Nouveau Bulletin des Sciences par lu Societe philomathique de Paris. – 1826. – P. 99–100.
34. Fourier J. B. J. Analyse des travaux de l'Academie Royale des Sciences. Pendant l'annee 1824. Partie mathematique // Histoire de l'Academie Royale des Sciences de l'Institut de France. – 1827. – 7. – P. xlvii–lv.
35. Fourier J. B. J. Solution d'une question particuliere du calcul des inegalites / Oeuvres de Fourier. Tome II. G. Darboux (ed.) – Paris: Gauthier-Villars, 1890. – P. 317–319.
36. Fourier J. B. J. Premier extrait / Oeuvres de Fourier. Tome II. G. Darboux (ed.) – Paris: Gauthier-Villars, 1890. – P. 321–324.
37. Fourier J. B. J. Second extrait / Oeuvres de Fourier. Tome II. G. Darboux (ed.) – Paris: Gauthier-Villars, 1890. – P. 325–328.
38. Gauss C. F. Uber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 1829. – 4. – P. 232–235.
39. Gauss C. F. On a new general principle of mechanics // Philosophical magazine. – 1830. – 8. – P. 137–140.
40. Gauss C. F. Principia Generalia Theoriae Figurae Fluidorum in Statu Aequilibrii // Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores. – 1832. – 7. – P. 39–88.
41. Gauss C. F. Allgemeine Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flussigkeiten im Zustand des Gleichgewichts. H. Weber (ed.)– Leipzig: Wilhelm Engelmann, 1903.
42. Gergonne J. D. Demonstration des deux theoremes de geometrie enonces a la page 289 du IX.e volume de ce recueil // Annales de mathematiques pures et appliquees. – 1820-1821. – 11. – P. 326–336.
43. Gergonne J. D. Recherche de quelques-unes des lois generales qui regissent les polyedres // Ibid. – 1824-1825. – 15. – P. 157–164.
44. Gergonne J. D. Geometrie de situation. Philosophie mathematique. Considerations philosophiques sur les elemens de la science de l'etendue // Ibid. – 1825-1826. – 16. – P. 209–231.
45. Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski. Band II. D. Hilbert (ed.) – Leipzig: Teubner, 1911.
46. Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski. Band II. D. Hilbert (ed.) – New York: Chelsea, 1967.
47. Gordan P. Ueber die Auflosung linearer Gleichungen mit reellen Coefficienten // Mathematische Annalen. – 1873. – 6. – P. 23–28.
48. Grattan-Guinness I. Joseph Fourier's anticipation of linear programming // Operational research quarterly. – 1970. – 21. – P. 361–364.
49. Kammerdiner A. R. Shor, Naum Zuseleich / Encyclopedia of optimization. 2-nd edition. C. A. Floudas, P. M. Pardalos (eds.) – Springer, 2009. – P. 3505–3507.
50. Kohler D. A. Translation of a report by Fourier on his work on linear inequalities // Opsearch. – 1973. – 10. – P. 38–42.
51. Lagrange [de la Grange] J. L. Mechanique analitique. – Paris: Vve Desaint, 1788.
52. Lagrange J. L. Mecanique analytique. 2-nd, revised edition. – Paris: Vve Courcier, 1811–1815.
53. Lagrange J. L. Theorie des fonctions analytiques. – Paris: Impr. de la Republique, 1797.
54. Laplace P. S. Traite de mecanique celeste. Tome II.– Paris: J. B. M. Duprat, 1798.
55. Laplace P. S. Mecanique celeste.Vol. II.– Boston: Hillard, Little & Wilkins, 1832.
56. Laplace P. S. Celestial mechanics. Vol. II. – New York: Chelsea, 1966.
57. Legendre A.-M. Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes. – Paris: F. Didot, 1805. – P. 72–75.
58. Legendre A.-M. Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes / Smith D. E. A source book in mathematics. – New York: McGraw-Hill, 1929. – P. 576–579.
59. Minkowski H. Geometrie der Zahlen. Erste Lieferung. – Leipzig: Teubner, 1896.
60. Minkowski H. Allgemeine Lehrsatze uber die konvexen Polyeder // Nachrichten von der koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, mathematisch-physikalische Klasse. – 1897. – P. 198–219.
61. Minkowski H. Theorie der konvexen Korper, insbesondere Begrundung ihres Oberflachenbegriffs / Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski. Band II. D. Hilbert (ed.) – Leipzig: Teubner, 1911. – P. 131–229.
62. Minkowski H. Geometrie der Zahlen. – New York: Chelsea, 1953.
63. Minkowski H. Gesammelte Abhandlungen. Band I, II.–New York: Chelsea, 1967.
64. Navier C. L. M. H. Sur le calcul des conditions d'inegalite // Bulletin des Sciences de la Societe philomatique de Paris. – 1825. – P. 66–68.
65. Nichol A. J. Tragedies in the life of Cournot // Econometrica. – 1938. – 6. – P. 193–197.
66. Oeuvres de Fourier. Tome II. G. Darboux (ed.) – Hildesheim: G. Olms, 1970.
67. Oeuvres de Lagrange. Vol. IX. J.-A. Serret (ed.) – Paris; Ve Courcier, 1813.
68. Oeuvres de Lagrange. Vol. IX. J.-A. Serret (ed.) – Paris: Gauthier-Villars, 1881.
69. Oeuvres de Lagrange. Vol. IX. J.-A. Serret (ed.) – Hildesheim: G. Olms, 1973.
70. Oeuvres de Lagrange. Vol. XI. Premiere partie: la statique. A. Serret, G. Darboux (eds.) – Paris: Gauthier-Villars, 1888.
71. Oeuvres de Lagrange, Vol. XI. Premiere partie: la statique. A. Serret, G. Darboux (eds.) – Paris: A. Blanchard, 1965.
72. Oeuvres de Lagrange. Vol. XII. Seconde partie: la dynamique. J.-A. Serret, G. Darboux (eds.) – Paris: Gauthier-Villars, 1889.
73. Oeuvres de Lagrange, Vol. XII. Seconde partie: la dynamique. J.-A. Serret, G. Darboux (eds.) – Paris: A. Blanchard, 1965.
74. Oeuvres de Lagrange. – Hildesheim: G. Olms, 1973.
75. Ostrogradsky M. Considerations generales sur les momens des forces // Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de Saint-Petersbourg. Serie VI: Sciences mathematiques et physiques. – 1838. – 1. – P. 129–150.
76. Ostrogradsky M. Memoire sur les deplacemens instantanes des systemes assujettis a des conditions variables // Ibid. – P. 565–600.
77. Poncelet J.V. Traite des proprietes projectives des figures.–Paris: Bachelier, 1822.
78. Poncelet J. V. Traite des proprietes projectives des figures / Smith D. E. A source book in mathematics. – New York: McGraw-Hill, 1929. – P. 315–323.
79. Poncelet J. V. Memoire sur la theorie generale des polaires reciproques // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 1829. – 4. – P. 1–71.
80. Prekopa A. On the development of optimization theory // American mathematical monthly. – 1980. – 87. – P. 527–542.
81. Roy R. L'oeuvre economique d'Augustin Cournot // Econometrica. – 1939. – 7. – P. 134–144.
82. von Staudt G. K. C. Geometrie der Lage. – Nurnberg: Bauer und Raspe, 1847.
83. de la Vallee Poussin Ch. Sur la methode de l'approximation minimum // Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles. – 1910-1911. – 35 (2). – P. 1–16.
84. Weyl H. Elementare Theorie der konvexen Polyeder // Commentarii Mathematici Helvetici. – 1935. – 7. – P. 290–306.
85. Weyl H. The elementary theory of convex polyhedra / Contributions to the theory of games. I. H. W. Kuhn, A. W. Tucker (eds.) – Princeton, NJ: Princeton University Press, 1950. – P. 3–18.
86. Weyl H. Gesammelte Abhandlungen. Band III. K. Chandrasekharan (ed.) – Berlin: Springer, 1968.