УДК 330.42:636.08

Пасічник Т.В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
завідувач кафедри інформаційних технологій
Львівського національного аграрного університету

Сибаль Я.І.
кандидат економічних наук,
доцент кафедри інформаційних технологій
Львівського національного аграрного університету

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ КОРМОВИРОБНИЦТВА І РОЗВИТКУ ТВАРИННИЦТВА ІЗ ГНУЧКИМИ ГРАНИЧНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Охарактеризовано умови розвитку тваринництва і кормовиробництва сільськогосподарських підприємств Західного регіону України. Розроблено оптимальні раціони годівлі тварин відповідно до економічної ефективності кормових культур. Розрахунок оптимальних раціонів годівлі тварин проведено на основі методу нечіткого моделювання. Результати розв'язання задач дають можливість розрахувати щоденні раціони годівлі тварин в розрізі статево-вікових груп за періодами утримання. Наведено приклад, який показує переваги використання алгоритму з гнучкими граничними обмеженнями порівняно з класичним методом лінійного програмування.

Ключові слова: математичне моделювання, продукція тваринництва, виробництво кормів, витрати кормів, економічна ефективність, нечітке моделювання.

Пасечник Т.В., Сыбаль Я.И. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ КОРМОПРОИЗВОДСТВА И РАЗВИТИЯ ЖИВОТНОВОДСТВА С ГИБКИМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Охарактеризованы условия развития животноводства и кормопроизводства сельскохозяйственных предприятий Западного региона Украины. Разработаны оптимальные рационы кормления животных в полном соответствии с экономической эффективностью кормовых культур. Расчет оптимальных рационов кормления животных проведён с помощью метода нечеткого моделирования. Результаты решения задачи дают возможность рассчитать ежедневные рационы кормления животных в разрезе половозрастных групп по периодам содержания. Приведен пример, который показывает преимущества использования алгоритма с гибкими предельными ограничениями по сравнению с классическим методом линейного программирования.

Ключевые слова: математическое моделирование, продукция животноводства, производство кормов, затраты кормов, экономическая эффективность, нечеткое моделирование.

Pasichnyk T.V., Sybal Y.I. THE OPTIMIZATION MODEL WITH FLEXIBLE EXTREME RESTRICTIONS OF THE DEVELOPMENT OF ANIMAL HUSBANDRY AND FODDER PRODUCTION

The article is devoted to modeling and conditions of the development of animal husbandry and fodder production of agricultural enterprises of the Western region of Ukraine. There were developed the optimal rations of feeding animals in full compliance with economic efficiency of forage crops. The calculation of optimal rations of the feeding of animals was carried out on the basis of the method of fuzzy modeling. The results of solution of the task make it possible to calculate the daily rations of feeding animals in terms of sex-age groups by the periods of keeping. The example shows the benefits of using the algorithm with the flexible boundary constraints compared to the classical method of the linear programming.

Keywords: mathematical modeling, livestock production, forage production, forage expenses, economic efficiency, fuzzy modeling.

Постановка проблеми. В умовах західних областей України, насамперед у Лісостеповій, Поліській і Прикарпатській зонах, одним з основних напрямів спеціалізації має бути молочний. Тут є природна кормова база, сприятливі умови для польового кормовиробництва, зокрема для вирощування вегетативної маси сільськогосподарських культур, а значить для виробництва об'ємистих кормів, що становлять основу кормової бази молочно-м'ясного скотарства.

Висока економічна ефективність молочно-м'ясного скотарства досягається за умов оптимізації виробництва і використання кормів. Вирішити ці питання можна в задачах оптимізації плану кормовиробництва на цілий рік, розподілу заготовлених кормів на стійловий період і розрахунку оптимальних раціонів годівлі однорідних за рівнем продуктивності та іншими показниками груп тварин або окремих тварин [1, с. 279; 2, с. 125–192]. Ці задачі містять велику кількість невідомих величин та обмежень, що часто приводить до нестійкого розв'язку задачі до незначної зміни вхідних обмежень задачі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Спеціальні публікації з питань економіко-математичного моделювання оптимізації кормовиробництва і розвитку тваринництва відомі [3, с. 278]. Цим питанням З.С. Кадюк і Я.І. Сибаль приділяли увагу у попередніх наукових публікаціях, а саме акцентували на важливості виробництва і використання кормів як основи розвитку тваринництва [1, с. 285; 2, с. 54], економічній ефективності галузі тваринництва як похідної міцної кормової бази, окреслювались шляхи її зміцнення [4, с. 288]. У таких задачах незначна зміна початкових умов часто призводить до суттєво інших розв'язків [5, с. 14]. Водночас, ґрунтуючись на дослідженнях американського математика, азербайджанця за походженням, Л. Заде [6, с. 338–353], розвивався потужний математичний апарат розв'язування нестійких задач оптимізації з нечіткими вхідними даними та обмеженнями – так зване нечітке моделювання [7, с. 185–192; 8, с. 30–102]. Однак у сільському господарстві ця теорія ще не набула належного застосування. Слід зауважити, що саме в цій галузі теорія нечітких множин найбільш актуальна, бо, на відміну від інших галузей, сільське господарство, по-перше, взаємозв'язане з природними умовами, по-друге, процеси виробництва сільськогосподарської продукції мають сезонний характер, по-третє, нормування кормів, внесення насіння, органічних добрив у ґрунт залежать від досліджень експерта. Тому інформація під час дослідження аграрних систем має суб'єктивний характер, містить велике число невизначеностей типу «багато», «мало», «ефективно», «неефективно» тощо. Опис подібної інформації на основі класичної математики збіднює математичну модель досліджуваної системи і робить її дуже наближеною.

Мета статті. Одним із важливих питань під час складання економіко-математичної моделі задачі оптимізації плану виробництва і використання кормів є визначення складу таких обмежень, які в основному повинні відповідати економічним умовам і вимогам, зв'язкам і закономірностям. Але водночас склад обмежень економіко-математичної задачі повинен охоплювати в основному такі групи умов: використання виробничих ресурсів; обов'язковий (гарантований) обсяг виробництва продукції рослинництва і тваринництва; умови, які забезпечують виробництво і використання для тваринництва кормів; взаємозв'язки між окремими змінними величинами; показники, які забезпечують розрахунок загальної кількості, структури та ефективності виробництва і використання кормів.

Розповсюджена думка вчених про введення у модель задачі не фіксованих раціонів, а мінімально і максимально зоотехнічно допустимих меж згодовування окремих видів кормів. Звідси виникає задача нечіткого лінійного програмування. В результаті розв'язку такої задачі із визначенням оптимальної структури посівних площ, розмірів і поєднання галузей тваринництва розробляють оптимальні раціони годівлі тварин відповідно до економічної ефективності кормових культур.

Необхідно також зазначити, що математичне формулювання такої системи має суттєві особливості. У більшості планово-економічних задач обсяг кожного виду виробничих ресурсів відомий. Але це не стосується кормів. У такій економіко-математичній моделі задачі, як і у багатьох інших подібних задачах, кормові ресурси, які виробляються у господарстві, становлять змінні величини, обсяг виробництва яких може бути визначений тільки після розв'язку задачі. Відповідно, система нерівностей, яка характеризує їх обсяг і змінні, відрізнятиметься від системи обмежень, які представляють процес використання інших видів ресурсів, що є величиною відомою.

Для кращого пояснення методу нечіткої оптимізації, як приклад, побудована спрощена економіко-математична модель розрахунку раціону годівлі корів. На основі цього методу необхідно розв'язази задачі оптимізації плану виробництва і використання кормів у Лісостеповій, Поліській і Прикарпатській зонах.

Виклад основного матеріалу. Розпочинаючи математичне формулювання системи обмежень, необхідно зауважити, що кормовий баланс неможливо представити декількома рівняннями, і тому тут повинна бути система рівнянь чи нерівностей. У цьому разі треба виходити з того, що не всі корми взаємозамінні. Оскільки для кожного виду тварин необхідне певне співвідношення різних груп кормів, окремі обмеження повинні накладатися також на їх виробництво і використання. Водночас обмеження формулюються і записуються так, щоб оптимальний раціон формувався в межах мінімально необхідної і максимально можливої норм згодовування кожної групи кормів відповідно до вибраного типу годівлі тварин.

Для деталізації культур зеленого конвеєра за строками їх згодовування впродовж пасовищного періоду необхідно, крім обмеження, яке виражає загальну кількість вироблених і використаних зелених кормів, ввести обмеження на окремі періоди їх використання.

Як відомо в організації і плануванні галузей тваринництва одним із важливих питань є визначення оптимальної у цих умовах структури стада, від якої значною мірою залежить обсяг виробництва продукції та її собівартість. У задачу треба також ввести обмеження, які виражають співвідношення між групами тварин.

Конкретну постановку задачі з оптимізації кормовиробництва здійснено для типового сільськогосподарського підприємства, розміщеного у зоні Львівської області. У розробленій для цього господарства економіко-математичній моделі задачі ставилось завдання оптимізувати водночас і поголів'я тварин в розрізі видів та статево-вікових груп і структуру посівів на корм для окремих видів тварин за періодами утримання (стійловий і пасовищний). Такий підхід до постановки задачі дає можливість після розв'язання її розрахувати в спеціально розробленій задачі з розподілу заготовлених кормів раціони годівлі кожної із груп тварин. За критерій оптимальності прийнято показник максимізації прибутку.

Цільову функцію і обмеження задачі подаємо у структурному математичному записі.

Мета задачі (цільова функція) полягає у максимізації прибутку

$$\sum_{j\in N} C_j x_j - x_i^{'} \rightarrow \max . \quad (1)$$

Обмеження з використання земельних угідь представлені нерівностями виду:

$$\sum_{j\in N_1} b_{ij} x_j \le B_i \ (i \in M_1) . \quad (2)$$

Група обмежень, яка забезпечує необхідний розмір галузей (посіву товарних культур, поголів'я тварин) записується так:

$$x_j \ge Q_i \ \ (i \in M_2;\ j \in N) . \quad (3)$$

Баланс виробництва і використання кормів диференційовано за видами тварин і періодами їх утримання. Це найскладніша і найвідповідальніша група обмежень. Вона ділиться на дві підгрупи.

а) за елементами поживності:

$$-\sum_{j\in N_1} d_{ij} x_j - \sum_{j\in N_1^{'''}} d_{ij} \overline{x}_i + \sum_{j\in N_2} d_{ij}^{'} x_j \le 0 \ \ (i \in M_3) ; \quad (4)$$

б) за дотриманням належної структури кормів:

$$\sum_{j\in N_2} \underline{d}_{ijh}^{'} x_j \le \sum_{j\in N_1} d_{ijh} \overline{x}_i + \sum_{j\in N_1^{'''}} d_{ijh} \overline{x}_i \le \sum_{j\in N_2} \overline{d}'_{ijh} x_j \ \ (i \in M_4). \quad (5)$$

Забезпечення відповідного співвідношення площ посіву культур та поголів'я статево-вікових груп тварин описується нерівностями

$$k_{ij} x_j - k_{ij}^{'} x_j \le 0 \ \ (i \in M_5;\ j \in N). \quad (6)$$

Баланс виходу побічної продукції рослинництва (гичка, жом, солома) представляється так:

$$\sum a_{ij} x_j - \widetilde{x}_i \le 0 \, (i \in M_6) . \quad (7)$$

Підрахунок поживності в розрізі груп кормів для годівлі тварин різних видів у розрізі періодів утримання, це рівняння виду:

$$\sum_{j\in N_1} d_{ijh} x_j + \sum_{j\in N_1^{'''}} d_{ijh} \overline{x}_i - \overline{\overline{x}}_i = 0 \, (i \in M_7). \quad (8)$$

Визначення відшукуваної величини матеріально-грошових витрат записується так:

$$\sum_{j\in N} s_j x_j - x_i^{'} = 0 \ \ (i \in M_8) . \quad (9)$$

Визначення відшукуваної величини вартості товарної продукції описується системою рівнянь

$$\sum_{j\in N} C_j x_j - x_i^{''} = 0 \ \ (i \in M_9) . \quad (10)$$

Використані в нерівностях множини, що позначають розмір галузей рослинництва і тваринництва (N, N_1); площі вирощування культур, між якими є певні залежності (N_1', N_1''); поголів'я статево-вікових груп тварин (N_2,N_2', N_2''); груп або видів кормів (M_i) тощо, є нечіткими величинами. Тому поставлене завдання є лінійною моделлю оптимізації з нечіткими обмеженнями.

Результати розв'язання задачі дають можливість розрахувати щоденні раціони годівлі тварин в розрізі статево-вікових груп за періодами утримання. Для цього необхідно для кожного виду тварин за періодами утримання скласти економіко-математичну задачу з оптимального розподілу визначених у розв'язаній задачі кількості кормів між статево-віковими групами тварин. Всю іншу інформацію, як кількість кормо-днів тварин за групами, нормами годівлі можна розрахувати із задачі оптимізації кормовиробництва.

Для кращого пояснення методики розв'язування задач з нечіткими обмеженнями, скористаємося спрощеним прикладом, у якому фігурують лише дві змінні величини.

В загальному випадку лінійна модель оптимізації з нечіткими обмеженнями має вигляд:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \tag{11}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \mathrel{\tilde{\le}} b_1; b_1 + d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \mathrel{\tilde{\le}} b_2; b_2 + d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m_1 1}x_1 + a_{m_1 2}x_2 + ... + a_{m_1 n}x_n \mathrel{\tilde{\le}} b_{m_1}; b_{m_1} + d_{m_1}, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} a_{m_1+1,1}x_1 + a_{m_1+1,2}x_2 + ... + a_{m_1+1,n}x_n \le b_{m_1+1}, \\ a_{m_1+2,1}x_1 + a_{m_1+2,2}x_2 + ... + a_{m_1+2,n}x_n \le b_{m_1+2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{13}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Для кожного нечіткого числа $\tilde{b}_i = [b_i, b_i + d_i]$ ($i = \overline{1, m_1}$) ставиться у відповідність кусково-неперервна функція належності $\mu(\tilde{b}_i)$, яка набуває значення від 0 до 1.

Для наближених чисел $\tilde{b}_i \cong [b_i, b_i + d_i]$ використовується функція належності $\mu(\tilde{b}_i)$ виду:

$$\mu(b) = \frac{b_i + d_i - b}{d_i}, \; b_i \le b \le b_i + d_i. \tag{15}$$

Вигляд цієї функції належності показано на рисунку 1.

Тоді згідно з [8, с. 143–149] моделлю (11)–(14) еквівалентна моделі лінійного програмування

$$\lambda \to \max \tag{16}$$

за умов

$$\begin{cases} d_0\lambda - c \cdot x \le -z_0, \\ d_1\lambda + a_1 \cdot x \le b_1 + d_1, \\ d_2\lambda + a_2 \cdot x \le b_2 + d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{m_1}\lambda + a_{m_1} \cdot x \le b_{m_1} + d_{m_1}, \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} a_{m_1+1} \cdot x \le b_{m_1+1}, \\ a_{m_1+2} \cdot x \le b_{m_1+2}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_m \cdot x \le b_m, \end{cases} \tag{18}$$

$$x \ge 0, \; 0 \le \lambda \le 1, \tag{19}$$

де $\lambda = \min\{\mu(z), \mu(b_1), \mu(b_2), \ldots, \mu(b_{m_1})\}$, z_1 – розв'язок за найбільших обмеженнях, z_0 – розв'язок за найменших обмеженнях, а$d_0 = z_1 - z_0$.

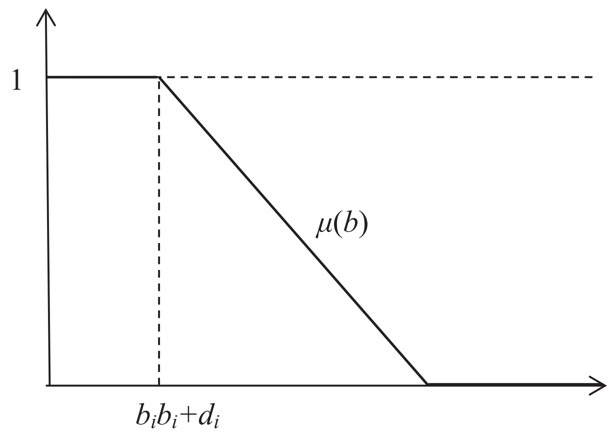

Рис. 1 Функція належності $\mu(b)$**.**

Приклад. Розрахувати раціон годівлі корів з двох кормів: комбікормів і сінажу. Раціон повинен містити певну кількість кормових одиниць, перетравного протеїну та кальцію і мати мінімальну собівартість. Вміст необхідних речовин у кормах подано в таблиці 1.

Таблиця 1

Добова потреба та вміст необхідних речовин у раціоні корів

Вид корму	Вміст в 1 кг корму			Собівартість 1 кг, гр.од.
	корм. од, кг	протеїну, г	кальцію, г	
Комбікорм	1,8	100	2	1,1
Сінаж	0,3	60	10	0,6
Добова потреба	13–15	1100	70–80	

Для розрахунку раціону годівлі корів формується векторно-оптимізуюча модель з гнучкими граничними обмеженнями виду (11)–(14):

$$Z(X) = 1{,}1x_1 + 0{,}6x_2 \to \min \tag{20}$$

за умов

$$\begin{cases} 1{,}8x_1 + 0{,}3x_2 \mathrel{\tilde{\ge}} 13; 13 + 2, \\ 2x_1 + 10x_2 \mathrel{\tilde{\ge}} 70; 70 + 10, \end{cases} \tag{21}$$

$$100x_1 + 60x_2 \ge 1100, \tag{22}$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \tag{23}$$

Розв'язками цієї задачі будуть значення:

$z_1 = 11{,}8966$ при $x_1 = 7{,}2414$, $x_2 = 6{,}5517$

та

$z_2 = 11{,}5769$ при $x_1 = 5{,}6992$, $x_2 = 8{,}7179$.

На основі цих розв'язків видно, що раціони годівлі корів суттєво різняться у разі зміни умов обмежень.

Побудуємо модель (16)–(19), яка для запропонованого прикладу матиме вигляд:

$$\lambda \to \max \tag{24}$$

за умов

$$\begin{cases} 0{,}3196\lambda + 1{,}1x_1 + 0{,}6x_2 \le 11{,}8966, \\ 2\lambda - 1{,}8x_1 - 0{,}3x_2 \le -13, \\ 10\lambda - 2x_1 - 10x_2 \le -70, \end{cases} \tag{25}$$

$$-100x_1 - 60x_2 \le -1100, \tag{26}$$

$$x_1, x_2 \geq 0,\ \ 0 \leq \lambda \leq 1. \qquad (27)$$

Розв'язок цієї задачі такий:

$$\gamma = 0,68;\ x_1 = 6,28078,\ x_2 = 6,59869.$$

Величина $\gamma = 1 - \gamma$ є мірою суб'єктивного ризику невиконання потреб в усіх необхідних компонентах. Оскільки значення $\gamma > 0,5$, то даний розв'язок задачі можна вважати прийнятним. За $\gamma < 0,5$ границі обмежень, для яких $\mu(b_i) < 0,5$, потрібно розбивати на менші інтервали нечіткості, і у них будувати нові неперервні кусково-лінійні функції належності. Тобто за рахунок вибору $d_0 = z - z_0$, (де $z_1 < z < z_0$) можна керувати ризиком γ.

За умови, що носій розв'язку не в змозі визначити рівень вимог для одного чи багатьох обмежень і відповідно цільової настанови, рекомендують вибирати середину відповідного інтервалу за рівень цих вимог.

Якщо згідно з цим конструктивним принципом одержимо неперервну кусково-лінійну функцію, що не є увігнутою на інтервалі $[b_i, b_i + d_i]$, то пропонується зменшувати цей інтервал до інтервалу $[b_i, b_i + d_i']$ $(d_i' < d_i)$, на якому функція належності $\mu(b_i)$ буде увігнутою.

Висновки. Проведені дослідження із побудови нечітких економіко-математичних моделей задач оптимізації організації кормовиробництва і розвитку тваринництва з врахуванням викладених особливостей і вимог на прикладі скотарських господарств лісостепової зони Львівської області підтверджуються одержаними результатами розв'язку задач на персональних комп'ютерах, які засвідчують, що за допомогою нечіткого економіко-математичного моделювання і відповідних комп'ютерних технологій забезпечується розрахунок оптимальних варіантів плану із сучасною структурою виробництва кормів і поголів'ям тварин порівняно з планами, які розроблені звичайними традиційними методами планування. Це підтверджує високу економічну ефективність застосування у практиці планування запропонованих нечітких економіко-математичних методів.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Кадюк З.С. Математичне формулювання задач виробництва і використання кормів з врахуванням наукових вимог до годівлі тварин / З.С. Кадюк, Я.І. Сибаль // Економіка АПК. – 1999. – № 6. – С. 278–280.
2. Сибаль Я.І. Економіко-математичне моделювання в АПК : [навч. посіб.] / Я.І. Сибаль, З.С. Кадюк, І.Є. Іваницький. – Львів: «Магнолія 2006», 2013. – 277 с.
3. Економіка сільського господарства : [навч. посіб.] / [В.К. Збарський та ін.] ; за ред. В.К. Збарського і В.І. Мацибори. – К. : Каравела, 2010. – 280 с.
4. Кадюк З.С. Основні резерви збільшення та підвищення економічної ефективності виробництва продукції тваринництва / З.С. Кадюк, Я.І. Сибаль // Вісник Львівського державного аграрного університету: Економіка АПК. – 2005. – № 12. – С. 284–292.
5. Пасічник Т.В. Нечітка модель оптимізації поголів'я тварин у господарствах / Т.В. Пасічник, О.С. Панасюк, Н.Б. Цьона // Збірник наукових праць Таврійського державного агротехнологічного університету (економічні науки). – 2009. – № 7. – С. 12–17.
6. Zadeh L. A. Fuzzy Sets / L. A. Zadeh // Inf. Contr. – 1965. – P. 338–353.
7. Пасічник Т.В. Моделі гнучкого прогнозування в аграрному секторі економіки / Т.В. Пасічник // Вісник Львівського державного аграрного університету: Економіка АПК. – 2007. – № 14(2). – С.185–192.
8. Сявавко М. Математичне моделювання за умов невизначеності / М. Сявавко, О. Рибицька. – Львів, Українські технології, 2000. – 319 с.