УДК 330.42-330.46

Чорнорот Я.О.
аспірант кафедри економічної інформатики
Національної металургійної академії України

ПОБУДОВА БАЗОВОЇ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Розробка економіко-математичних моделей з використанням теорії комплексних чисел є перспективним напрямком для розширення та вдосконалення математичних моделей в економіці. Теорія комплексних чисел може бути застосована в багатьох розділах економіко-математичного моделювання. У статті розроблена та проаналізована базова модель управління запасами із застосуванням теорії комплексних чисел.

Ключові слова: теорія комплексних чисел, економіко-математична модель, управління запасами, замовлення, обсяг, витрати.

Чернорот Я.А. ПОСТРОЕНИЕ БАЗОВОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Разработка экономико-математических моделей с использованием теории комплексных чисел является перспективным направлением для расширения и совершенствования математических моделей в экономике. Теория комплексных чисел может быть применена во многих разделах экономико-математического моделирования. В статье разработана и проанализирована базовая модель управления запасами с применением теории комплексных чисел.

Ключевые слова: теория комплексных чисел, экономико-математическая модель, управление запасами, заказ, объем, затраты.

Chornorot Ya.O. BUILD A BASIC INVENTORY MODEL WITH USING THE THEORY OF COMPLEX NUMBERS

Development of economic-mathematical models with using the theory of complex numbers is a promising direction for the expansion and improvement of mathematical models in economics. The theory of complex numbers can be used in many branches of economic-mathematical modeling. In this article is designed and analyzed the basic model of inventory management with using the theory of complex numbers.

Keywords: theory of functions complex numbers, economic-mathematical model, inventory management, order, volume, costs.

Постановка проблеми. В економічних системах широко використовуються математичні методи і моделі. Вони дозволяють прискорити проведення економічного аналізу, підвищують точність обчислень, найбільш повно враховують вплив факторів на результати діяльності підприємства. Тому побудова економіко-математичних моделей є важливою складовою для успішної діяльності підприємства. Моделі управління запасами є важливою частиною управлінської діяльності. Їх використання дає можливість підприємству максимізувати свій дохід за рахунок оптимізації рівня запасів і ефективного їх використання. Розроблено багато моделей управління запасами із застосуванням різноманітних математичних методів, але теорію комплексних чисел в них ще не було застосовано.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Економіко-математичне моделювання з використанням теорії комплексних чисел є відносно новим та досить перспективним напрямком в сучасній науці. Дослідженнями у даній сфері займаються такі вчені, як С.Г. Светуньков, Г.В. Савинов, І.С. Светуньков, Т.В. Блудова, О.О. Мельник, Т.В. Корецька, А.А. Богданов, А.В. Заграновська, І.Ю. Шарипова та ін.

С.Г. Светуньковим було запропоновано використовувати в економіці функції комплексних змінних, які в силу притаманних їм властивостей інакше, ніж функції дійсних змінних, описують взаємозв'язок між економічними показниками [1].

І.С. Светуньков у своїх наукових працях на прикладі теорії виробничих функцій довів, що використання комплексних змінних значно розширює інструментальну базу економічного аналізу виробничих процесів; розглянув різні види виробничих функцій комплексних змінних і те, як вони можуть бути використані в економіко-математичному моделюванні [2; 3].

Багато науковців у своїх працях приділили увагу проблемі управління запасами, а саме Т.В. Алесинська, Е.Н. Ломкова, А.А. Епов, Н.В. Новікова, В.В. Федосєєва, Б.К. Плоткін, Л.А. Делюкін, М.І. Баканов, М.В. Мельник, А.Д. Шеремет, О.В. Ефімова, А.М. Стерлігова та ін. Розроблено багато моделей управління запасами із застосуванням різноманітних математичних методів, але на цей час невирішеним залишається питання побудови моделей управління запасами з використанням теорії комплексних змінних.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Розробка базової моделі управління запасами з використанням теорії комплексних чисел та аналіз отриманих результатів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Управління запасами – це оптимізація запасів товарів, сировини й інших об'єктів діяльності підприємства з метою зменшення витрат на зберігання при забезпеченні рівня обслуговування й безперебійної роботи підприємства. Управління запасами передбачає організацію контролю їх фактичного стану. Контроль стану запасів – це вивчення і регулювання рівня запасів з метою виявлення відхилень від норм запасів та прийняття оперативних заходів з ліквідації відхилень. Досягнення оптимальної домірності масштабів виробництва й запасів є однією з головних завдань в управлінні запасами [4, с. 313–314].

Базова модель управління запасами – це модель оптимального економічного розміру замовлення, який забезпечує мінімальну величину сумарних витрат та дає можливість мінімізувати видатки на зберігання запасу та допомагає визначити ефективну площу складських приміщень. Вся кількість одиниць замовлення надходить одночасно [5, с. 312].

Формули базової моделі:

$$L = K * \frac{v}{Q} + s * \frac{Q}{2}, \quad (1)$$

де L – загальні витрати на управління запасами в одиницю часу;

Q – розмір замовлення;

ν – інтенсивність споживання запасу;

s – витрати на зберігання запасу;

K – витрати на здійснення замовлення.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\mathrm{Kv}}{s}}, \tag{2}$$

де Q* – оптимальний розмір замовлення.

Зазвичай в теорії управління запасами змінними виступають: загальні витрати на управління запасами L, витрати на здійснення замовлення K, інтенсивність (швидкість) споживання запасу v, розмір замовлення Q та витрати на зберігання запасу s, як найбільш істотні фактори. Представимо витрати на закупку та витрати на зберігання у вигляді комплексної змінної b_0+ib_1. Тоді функція загальних витрат на управління запасами в загальному вигляді буде виглядати так:

$$L = f\,(b_0 + ib_1), \tag{3}$$

де $b_0 = K\frac{V}{Q}$ – витрати на закупку; (4)

$b_1 = s\frac{Q}{2}$ – витрати на зберігання. (5)

Тут L, b_0 і b_1 – позитивні дійсні числа. Віднесення b_0 в дійсну частину, а b_1 – в уявну умовну і не грає принципового значення. У такій функції комплексному числу зіставляється дійсне число L.

У найпростішому випадку зв'яжемо витрати на закупку та зберігання наступним чином:

$$L = (a_0 + ia_1)(b_0 + ib_1). \tag{6}$$

Тут a_0 і a_1 – дійсні числа. Перший співмножник, що представляє собою комплексне число (a_0+ia_1), допомагає зв'язати в одній моделі витрати і результати, але вимагає самостійного наукового дослідження.

Здійснюючи перемноження співмножників в правій частині рівності (6) і групуючи дійсну та уявну частини, отримаємо:

$$L = (a_0b_0 + a_1b_1) + i(a_0b_1 - a_1b_0). \tag{7}$$

В результаті маємо комплексне число, дійсна частина якого $(a_0b_0 + a_1b_1)$ дорівнює L, а уявна частина $(a_0b_1 - a_1b_0)$ повинна дорівнювати нулю в силу того, що в лівій частині рівності уявної частини немає, тобто вона представлена добутком i0. Отже, функція (6) являє собою адитивну модель вигляду:

$$L = a_0b_0 + a_1b_1, \tag{8}$$

де коефіцієнти a_0 і a_1 являють собою частини одного комплексного числа.

Саме остання обставина зумовлює особливість властивостей запропонованої моделі. Використовувати модель (8) в даному випадку не можна, оскільки має виконуватися умова:

$$a_0b_1 - a_1b_0 = 0\,. \tag{9}$$

Розв'язання системи рівнянь (8) – (9) дозволяє визначити значення коефіцієнтів a_0 та a_1. Ці значення також можна отримати і використовуючи безпосередньо модель (6). Для цього визначимо комплексне число коефіцієнтів через витрати, зробивши кілька елементарних перетворень:

$$a_0 - ia_1 = \frac{L}{b_0 + ib_1} = \frac{L(b_0 - ib_1)}{b_0^2 + b_1^2}. \tag{10}$$

Рівність (3) виконується тільки в тому випадку, якщо рівні попарно дійсні та уявні частини комплексних чисел в його лівій і правій частинах. Розкриваючи дужки і групуючи окремо дійсну та уявну частини, отримаємо формули для обчислення кожного з коефіцієнтів:

$$a_0 = \frac{Lb_0}{b_0^2 + b_1^2} \qquad a_1 = \frac{Lb_1}{b_0^2 + b_1^2}\,. \tag{11}$$

Ці формули дозволяють не тільки знайти чисельні значення коефіцієнтів за відомими значеннями витрат, а й дати економічну інтерпретацію значень кожного з коефіцієнтів a_0 та a_1.

$$a_0 = \frac{LK\frac{v}{Q}}{K^2\frac{V^2}{Q^2} + s^2\frac{Q^2}{4}} = \frac{LK\frac{v}{Q}}{\frac{4K^2v^2 + s^2Q^2}{4Q^2}} = \frac{LKv}{Q} \times \frac{4Q^2}{4K^2v^2 + s^2Q^2} =$$

$$= \frac{4LKvQ}{4K^2v^2 + s^2Q^2}\,. \tag{12}$$

$$a_1 = \frac{Ls\frac{Q}{2}}{\frac{4K^2v^2s^2Q^4}{4Q^2}} = \frac{LsQ}{2} \times \frac{4Q^2}{4K^2v^2 + s^2Q^2} =$$

$$= \frac{2LSQ^3}{4K^2Q^2 + s^2Q^2} = \frac{2LsQ}{4K^2 + s^2}\,. \tag{13}$$

Коефіцієнти a_0 та a_1 будуть рівні, якщо:
$\frac{4LKvQ}{4K^2v^2 + s^2Q^2} = \frac{2LSQ^3}{4K^2Q^2 + s^2Q^2}$ та виконуються умови

$$4K^2v^2 + s^2Q^2 \neq 0$$

$$4K^2v^2 + s^2Q^2 > 0 \Longleftrightarrow$$

$$4LKvQ = 2LsQ^2 \Longleftrightarrow$$

$$2Kv = sQ^2$$

$$Q^2 = \frac{2Kv}{s} \quad \Longleftrightarrow \quad Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2Kv}{s}}\,. \tag{14}$$

Таким чином, якщо розмір заказу дорівнює оптимальному, то коефіцієнти:

$a_0 = a_1$ та приймають наступні значення:

$$a_0 = \frac{4LKv\sqrt{\frac{2Kv}{s}}}{4K^2v^2 + s^2\frac{2Kv}{s}} = \frac{4LKv\sqrt{2Kv}}{\sqrt{s}(4K^2v^2 + s2Kv)} = \frac{2L\sqrt{2Kv}}{\sqrt{s}(2Kv + s)},$$

$$a_1 = \frac{2Ls\sqrt{\frac{2Kv}{s}}}{4K^2 + s^2} = \frac{2L\sqrt{2Kvs}}{4K^2 + s^2}\,. \tag{15}$$

Можна зробити наступні висновки:

– якщо об'єм заказу менше оптимального Q < Qопт , то $a_0 > a_1$;

– якщо об'єм заказу більше оптимального Q > Qопт , то $a_0 < a_1$.

При цьому буде виконуватись співвідношення:

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{Kv/_Q}{sQ/_2} = \frac{b_0}{b_1}\,. \tag{16}$$

Як випливає з (4) коефіцієнт a_1 відображає зміну витрат на закупку запасів, а коефіцієнт a_0 відображає зміну витрат на зберігання запасів. Тому дані коефіцієнти можна назвати – коефіцієнти витрат на закупку та зберігання відповідно.

Розглянемо можливі межі зміни цих коефіцієнтів залежно від зміни витрат або на поставку, або на їх зберігання, тобто:

$$a_0 = f\left(\frac{Kv}{Q}\right), \tag{17}$$

$$a_1 = f\left(\frac{sQ}{2}\right). \tag{18}$$

Значення коефіцієнтів a_0 та a_1 ведуть себе по-різному. Коефіцієнт a_0 при прагненні об'єму заказу Q до нуля сам прагне до нуля, а коефіцієнт a_1 при прагненні параметра Q до нескінченності – прагне до одиниці:

$$\lim_{Q\to 0} a_0 = 0\,, \tag{19}$$

$$\lim_{Q\to\infty} a_1 = 1\,. \tag{20}$$

Тому з урахуванням несиметричності поведінки коефіцієнтів їх слід розглядати окремо.

Для наглядного аналізу значень коефіцієнтів витрат на зберігання та закупку розглянемо конкретний приклад розв'язання задачі з управління запасами та побудуємо для цього графіки. Вихідні дані задачі, взяті з джерела [6, с. 137], інтенсивність споживання запасу $\nu = 500$ шт. на рік, витрати на здійснення замовлення $K = 10$ грн., витрати на зберігання запасу $s = 0{,}4$ грн./шт.* рік. Розраховане значення оптимального розміру заказу приблизно дорівнює $Q^* \approx 158$ штук.

Побудуємо для цієї задачі графік витрат на управління запасами (рис. 1) та графік зміни значень коефіцієнтів a_0 та a_1 (рис. 2).

Аналізуючи графік зміни значень коефіцієнтів a_0 та a_1, можна зробити висновок, що криві коефіцієнтів a_0 та a_1 ведуть себе різноспрямовано.

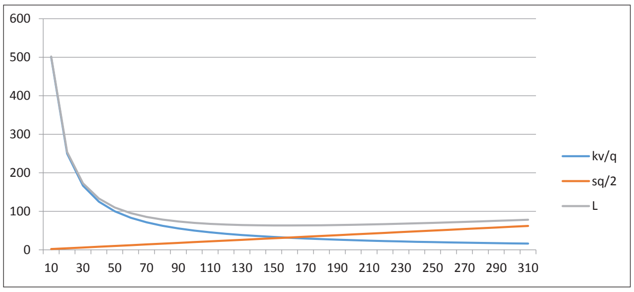

Рис. 1. Графік витрат на управління запасами

У кривої коефіцієнту витрат на закупку a_0, зі збільшенням розміру замовлення Q, спостерігається така поведінка: крива спочатку зростає, досягає свого максимального значення та починає стрімко зменшуватись, потім перетинається з кривою a_1 та продовжує убувати, прагнучи до нуля. При мінімальному значенні Q коефіцієнт a_0 приблизно рівний 1. При максимальних витратах на закупку досягається максимальне значення коефіцієнту a_0.

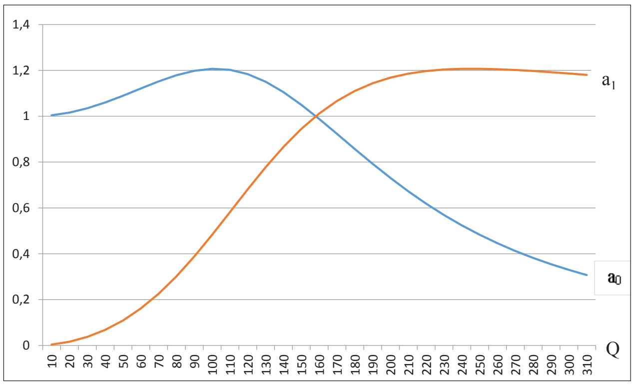

Рис. 2. Графік зміни значень коефіцієнтів a_0 та a_1

Зі збільшенням розміру замовлення Q крива коефіцієнту витрат на зберігання a_1 починає зростати, перетинається з кривою a_0 та продовжує зростати до свого пікового значення, після чого починає поступово зменшуватись, прагнучи до одиниці. При мінімальному значенні Q коефіцієнт a_1 приблизно дорівнює 0. При максимальних витратах на зберігання досягається максимальне значення коефіцієнту a_1.

При цьому значення коефіцієнтів a_0 та a_1 у своїх максимальних точках приблизно рівні один одному.

Обмежимо область допустимих значень коефіцієнтів a_0 та a_1 (рис. 3).

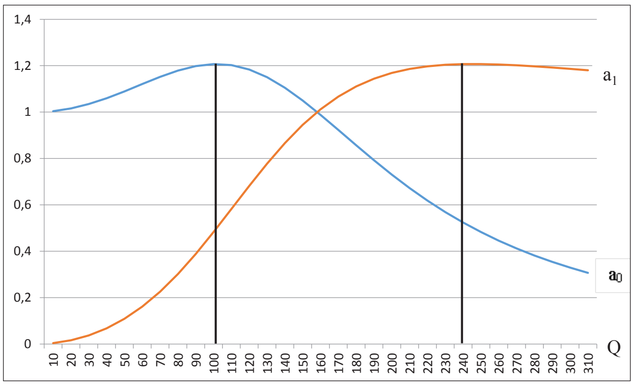

Рис. 3. Область визначення функцій a_0 та a_1

Таким чином, область визначення функцій a_0 та a_1 можна обмежити лише тими значеннями об'ємів партії поставки, що відповідають максимальним значенням коефіцієнтів. При цьому коефіцієнт a_1 буде монотонно зростати, а коефіцієнт a_0 – спадати. Це пояснюється тим, що об'єми партій поставки, що відповідають значенням, що не входять в цей відрізок, є абсолютно неприйнятними, оскільки ці витрати є дуже значними.

Висновки з даного дослідження. Вибір правильної стратегії управління запасами є однією з головних задач керівників організацій. Запаси утворюються та необхідні майже будь-якому підприємству для забезпечення безперервного і ефективного функціонування. Тому фінансовий успіх підприємства в значній мірі залежить від раціонального управління запасами.

У статті побудовано базову модель управління запасами із застосуванням теорії комплексних змінних, отримані та проаналізовані результати використання моделі. Перспективним для подальших розвідок у даному напрямку є розробка інших моделей управління запасами з використанням теорії комплексних чисел.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Светуньков С.Г. Основы эконометрии комплексных переменных / С.Г. Светуньков. – СПб. : Изд-во СПбГУЭФ. – 2008. – 108 с.
2. Светуньков И.С. Использование комплексных переменных в теории производственных функций / И.С. Светуньков // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов. – 2007. – № 4.
3. Светуньков И.С. Производственные функции комплексных переменных в экономическом анализе: автореф. дис. … к.э.н. : спец. 08.00.13 «Математические и инструментальные методы в экономике» / И.С. Светуньков // – Санкт-Петербург, – 2008. – 17 с.
4. Хаврук В.А. Анализ систем управления запасами. / В.А. Хаврук // Вестник НТУ. – К. : НТУ, 2012. – Вип. 26. – С. 313–324.
5. Санько Я.В. Щодо формування витратної частини логістичної системи при визначенні цінової політики підприємства / Я.В. Санько, Д.В. Григорова // Науково-технічний збірник. – 2011. – № 101. – С. 311–316.
6. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу «Экономико-математические методы и модели» / Т.В. Алесинская // – Таганрог : Изд-во ТРТУ. – 2002. – 153 с.